Université de Bordeaux | **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Licence math-info | Année 2018–2019

Devoir Surveillé, 7 novembre 2018
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – [Décomposition $A = PLU$]

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Résoudre $AX = B$ et écrire A sous la forme $A = PLU$.

2) En utilisant le résultat précédent, calculer $\det A$.

Exercice 2 – Soit $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $S \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{spec} S \subset \mathbb{R}_+$ (d'après le cours, les valeurs propres de S sont réelles, il reste donc à montrer qu'elles sont positives ou nulles).

2) Montrer que pour tout $i \in [[1, n]]$, $S_{i,i} \geqslant 0$.

3) Soient $d_1, \ldots, d_n$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ et $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, exprimer le coefficient $(DS)_{i,j}$ en fonction des d_k et des $S_{l,m}$.

4) Montrer que $0 \leqslant \mathrm{Tr}(DS) \leqslant \mathrm{Tr}(D)\mathrm{Tr}(S)$.

5) Montrer que si A et B appartiennent à $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$, alors

$$0 \leqslant \mathrm{Tr}(AB) \leqslant \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B).$$

Exercice 3 – Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $E = \mathbb{R}[X]_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \deg P \leqslant n\}$. On considère le produit scalaire sur E défini pour $(P, Q) \in E^2$ par

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt associée à la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

1) Que vaut P_0 ?

2) Montrer que pour tout $k \in [[0, n]]$, $(P_k|P_k') = 0$.

3) En utilisant le résultat précédent, montrer que $|P_k(0)| = 1$ pour tout $k \in [[0, n]]$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

4) Soit $F = \{P \in E \ : \ P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

5) Donner une base de F en fonction des P_i. En déduire une base de $F^\perp$.

6) Soit π la projection orthogonale sur $F^\perp$. Calculer $\pi(1)$.

7) Calculer $d(1, F)$ et $d(1, F^\perp)$ (où d est la distance associée à $(\cdot|\cdot)$).