Université de Bordeaux
Licence math-info

Licence 3 - Algorithmique algébrique 2
Année 2018–2019

Devoir Surveillé, 7 novembre 2018
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – [DÉCOMPOSITION $A = PLU$]

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) *Résoudre $AX = B$ et écrire A sous la forme $A = PLU$.*

On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice concaténée $(A|B)$.

	$l_2 \longleftarrow l_2 - l_1$ $l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_1$	$l_2 \longleftrightarrow l_3$	
$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ (1) & 0 & -1 & -3 \\ (2) & -5 & 3 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ (2) & -5 & 3 & -1 \\ (1) & 0 & -1 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ (2) & -5 & 3 & -1 \\ (1) & (0) & -1 & -3 \end{matrix}$

L'équation $AX = B$ devient

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -1 \\ \qquad\quad -x_3 = -3 \end{cases}$$

ce qui donne la solution unique $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On obtient aussi la décomposition $A = PLU$ où

$$P = P_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) *En utilisant le résultat précédent, calculer* $\det A$.

$\det A = \det P \det U = 10 \cdot \varepsilon((2,3)) = -10$.

Exercice 2 – *On note $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1) *Soit $S \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{spec} S \subset \mathbb{R}_+$ (d'après le cours, les valeurs propres de S sont réelles. Il reste donc à montrer qu'elles sont positives ou nulles).*

Soit $\lambda \in \operatorname{spec}(S)$ et soit X un vecteur propre associé à λ. Alors ${}^tXSX \geqslant 0$ puisque S est positive. D'autre part, ${}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX$. Donc $\lambda {}^tXX \geqslant 0$. Comme $X \neq 0$, ${}^tXX > 0$. On en déduit que $\lambda \geqslant 0$.

2) *Montrer que pour tout $i \in [[1,n]]$, $S_{i,i} \geqslant 0$.*

$S_{i,i} = e_i S e_i \geqslant 0$.

3) *Soient $d_1, \dots, d_n$ des réels positifs ou nuls et soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, exprimer le coefficient $(DS)_{i,j}$ en fonction des d_k et des $S_{l,m}$.*

$(DS)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k} S_{k,j} = d_i S_{i,j}$.

4) *Montrer que $0 \leqslant \mathrm{Tr}(DS) \leqslant \mathrm{Tr}(D)\mathrm{Tr}(S)$.*

$\mathrm{Tr}(DS) = \sum_{i=1}^{n} (DS)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} d_i S_{i,i} \geqslant 0$ puisque les d_i et $S_{i,i}$ sont positifs ou nuls.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(D)\mathrm{Tr}(S) &= \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} S_{i,i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i S_{i,i} + \sum_{i \neq j} d_i S_{j,j} \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} d_i S_{i,i}
\end{aligned}$$

puisque les $d_i S_{j,j}$ sont positifs ou nuls. On en déduit que $\mathrm{Tr}(DS) \leqslant \mathrm{Tr}(D)\mathrm{Tr}(S)$.

5) *Montrer que si A et B appartiennent à $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$, alors*

$$0 \leqslant \mathrm{Tr}(AB) \leqslant \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B).$$

D'après le théorème de décomposition spectrale, il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = {}^tUAU$ est diagonale. Comme A est symétrique positive, les coefficients de D sont positifs ou nuls. Comme ${}^tU = U^{-1}$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}({}^tUABU) = \mathrm{Tr}({}^t(UAU)({}^tUBU)) = \mathrm{Tr}(DS)$ où $S = {}^tUBU$. Or ${}^tS = {}^tU{}^tBU = {}^tUBU = S$ donc S est symétrique. De plus, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX{}^tUBUX = {}^t(UX)B(UX) \geqslant 0$ donc S est positive. On conclut grâce à la question précédente que $0 \leqslant \mathrm{Tr}(DS) \leqslant \mathrm{Tr}(D)\mathrm{Tr}(S)$. Comme $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$ et $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(S)$, on obtient bien le résultat.

Exercice 3 – *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $E = \mathbb{R}[X]_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \deg P \leqslant n\}$. On considère le produit scalaire sur E défini pour $(P,Q) \in E^2$ par*

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt associée à la base $(1, X, \dots, X^n)$.

1) *Que vaut P_0 ?*
On calcule

$$(1|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1,$$

donc $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{(1|1)}} = 1$.

2) *Pour tout $k \in [[0,n]]$, montrer que $< P_k, P_k' >= 0$.*
Comme $P_0 = 1$, $P_0' = 0$ et $(P_0|P_0') = 1$. Pour $k \geqslant 1$, $\deg P_k' = k-1$ donc $P_k' \in F_k = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^{k-1})$. On en déduit que $(P_k|P_k') = 0$.

3) *En utilisant le résultat précédent, montrer que $|P_k(0)| = 1$ pour tout $k \in [[0,n]]$ (on pourra effectuer une intégration par parties).*

$$\begin{aligned}
(P_k|P_k') &= \int_0^{+\infty} P_k'(t)P_k(t)e^{-t}dt \\
&= [P_k(t)^2e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} P_k(t)(P_k'(t) - P_k(t))e^{-t}dt \\
&= -P_k(0)^2 - (P_k|P_k') + (P_k|P_k)
\end{aligned}$$

Comme $(P_k|P_k') = 0$, et $(P_k|P_k) = 1$ (la base est orthonormée) on en déduit que $P_k(0)^2 = 1$.

4) *Soit $F = \{P \in E \ : \ P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.*
Méthode 1. Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(P) = P(0)$. Alors pour $(P,Q) \in E^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(aP+bQ) = (aP+bQ)(0) = aP(0)+bQ(0) = af(P)+bf(Q)$. f est donc une forme linéaire et $F = \mathrm{Ker}\, f$ est un sous espace vectoriel de E.
Remarquons que comme $f(1) = 1$, f est surjective. Par le théorème du rang,

$$\dim F = \dim E - 1 = n.$$

Méthode 2. F est non vide car $0 \in F$. Soient $(P,Q) \in F^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(aP+bQ)(0) = aP(0) + bP(0) = 0$ donc $aP+bQ \in F$.
Remarquons que si $P = \sum_{i=0}^n a_iX^i \in F$, alors $P \in F$ si et seulement si $a_0 = 0$. Donc $X, X^2, \ldots, X^n$ engendre F. Cette famille étant libre, c'est une base et $\dim F = n$.

5) *Donner une base de F en fonction des P_i. En déduire une base de $F^\perp$.*
Pour $i \in [[1,n]]$, on pose $Q_i(X) = P_i(X) - P_i(0)$. Alors pour tout i, $Q_i(0) = 0$ donc $Q_i \in F$. La famille de polynômes $(Q_i)_{i\in[[1,n]]}$ est une famille libre puisque pour tout i, $\deg Q_i = i$. Comme elle a n éléments, c'est une base de F.

Comme $\dim F = n$, $\dim F^{\perp} = 1$. Soit $Q = \sum_{j=0}^{n} q_j P_j$. $Q \in F^{\perp}$ si et seulement si $(Q|Q_i) = 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$. On calcule

$$
\begin{aligned}
(Q|Q_i) &= \sum_{j=0}^{n} q_j (P_j|(P_i - P_i(0)) \\
&= \sum_{j=0}^{n} q_j (P_j|P_i) - \sum_{j=0}^{n} q_j P_i(0)(P_j|1) \\
&= q_i(P_i|P_i] - q_0 P_i(0)(1|1] \\
&= q_i - q_0 P_i(0)
\end{aligned}
$$

puisque $P_0 = 1$ et que $(P_0, \ldots, P_n)$ est orthonormée. On en déduit que $Q \in F^{\perp}$ si et seulement si $q_i = q_0 P_i(0)$ pour tout i, c'est-à-dire si et seulement si $Q \in \mathbb{R}Q_0$ où $Q_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P_i(0) P_i$. (Q_0) est donc une base de $F^{\perp}$.

6) *Soit π la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. Calculer $\pi(1)$.* Soit $Q_0^* = Q_0/||Q_0||$ (où $||\cdot||$ est la norme associée à $(\cdot|\cdot)$). Comme

$$
||Q_0|| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} P_i(0)^2} = \sqrt{n+1},
$$

$$
Q_0^* = \frac{1}{\sqrt{n+1}} Q_0.
$$

On obtient

$$
\pi(1) = (1|Q_0^*)Q_0^* = \frac{1}{n+1} Q_0.
$$

7) *Calculer $d(1, F)$ et $d(1, F^{\perp})$.*

$1 = \pi(1) + x_1$ où $x_1 \in F$ et $\pi(1) \in F^{\perp}$ donc

$$
d(1, F) = d(1, x_1) = d(1, 1 - \pi(1)) = ||\pi(1)|| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.
$$

Enfin,

$$
d(1, F^{\perp}) = ||1 - \pi(1)|| = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.
$$