université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Examen première session** **PARCOURS : LIMI 501 Code UE : 4TTI502U** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 16/12/2019 Heure : 14h30 Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Jehanne	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

1. Soit $S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. En appliquant la méthode des coefficients indéterminés, déterminer la décomposition de Cholesky $S = {}^tRR$ (si elle existe).
2. En déduire $\det S$.

Exercice 2

Soient $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. et $X = (x_i) \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On rappelle que la norme $||\cdot||_\infty$ est définie par $||X||_\infty = \max_{i\in[[1,n]]} |x_i|$ et on note $|||\cdot|||_\infty$ la norme de $M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $||\cdot||_\infty$.

Cet exercice vise à retrouver l'égalité vue en cours et TD suivante : $|||A|||_\infty = \max_{i\in[[1,n]]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

On pose $\mathcal{M} = \max_{i\in[[1,n]]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$. On va donc démontrer que $|||A|||_\infty = \mathcal{M}$. Soit $Y = AX$. On note $Y = (y_i)$.
1. Pour tout $i \in [[1,n]]$, exprimer y_i en fonction des coefficients de A et de X.
2. Montrer que si $||X||_\infty = 1$, alors $||Y||_\infty \leq \mathcal{M}$.
3. En déduire que $|||A|||_\infty \leq \mathcal{M}$.
4. Montrer enfin que $|||A|||_\infty \geq \mathcal{M}$ (pour un certain indice i_0 bien choisi, on pourra considérer l'élément X_0 de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ dont la j-ème coordonnée est $x_j = 0$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $x_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ sinon).

Exercice 3 (les questions 1 et 2 sont indépendantes)

Soit $\mathcal{N}$ une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On appelle conditionnement de A relativement à $\mathcal{N}$ le nombre réel

$$\mathrm{cond}(A) = \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(A^{-1}).$$

1. Montrer que si $\mathcal{N}$ est une norme subordonnée, alors $\mathcal{N}(I_n) = 1$. En déduire que dans ce cas, $\mathrm{cond}(A) \geq 1$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. On considère une norme $||\cdot||$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, sa norme subordonnée $|||\cdot|||$ de $M_n(\mathbb{C})$ et cond le conditionnement défini par cette norme. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\Delta B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Soient enfin X et $X + \Delta X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AX = B$ et $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$ (donc $A\Delta X = \Delta B$). Montrer que

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta B||}{||B||}$$

(c'est une majoration de l'erreur relative obtenue sur la solution de l'équation $AX = B$ en fonction d'une erreur relative commise sur le vecteur B et du conditionnement de A).

Exercice 4 (les questions 1 et 2 sont indépendantes)

1. Soient a un réel strictement positif, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On souhaite savoir ce que donnerait la méthode de Jacobi pour la résolution de l'équation $AX = B$. On rappelle que la matrice d'itération correspondante est $J = I_3 - a^{-1}A$.

a) Calculer $\rho(J)$.

b) Pour quelles valeurs de a la méthode converge-t-elle pour tout vecteur initial ?

2. Soit A une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que A est à diagonale strictement dominante. Soit $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On utilise la méthode de relaxation de paramètre $\omega > 0$ obtenue à partir de la méthode de Jacobi pour résoudre $AX = B$. La matrice d'itération correspondante est donc $A_\omega = I_n - \omega D^{-1}A$ où $D = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$.

a) Pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, exprimer le coefficient $b_{i,j}$ de A_ω en fonction des coefficients de A et de ω (on différenciera les cas $i = j$ et $i \neq j$).

b) Montrer que si $\omega \in]0, 1]$, la méthode converge pour tout vecteur initial (on pourra pour tout i chercher à majorer $\sum_{i=1}^{n} |b_{i,j}|$).

Exercice 5

On note $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice S de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si ${}^tXSX \geq 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et qu'elle est dite définie positive si ${}^tXSX > 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Rappeler pourquoi $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.

2. Soit $S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

On pourrait montrer de même que S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Ce n'est pas demandé ici.

Soient $A, B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ positives.

3. Montrer que $A + B$ est symétrique positive.

4. On suppose A définie positive. On rappelle qu'il existe alors $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A = {}^tRR$. Soit $C = {}^tR^{-1}BR^{-1}$. Montrer que C est une matrice symétrique positive.

5. Soit D une matrice diagonale à coefficients positifs ou nuls. Montrer que $\det(I_n + D) \geq 1 + \det D$.

6. En déduire que $\det(I_n + C) \geq 1 + \det C$.

7. En déduire que si A est définie positive, $\det(A + B) \geq \det A + \det B$.

8. On ne suppose plus A symétrique définie positive, mais on suppose toujours que A et B sont symétriques positives. Pour tout entier k strictement positif, on pose $A_k = A + \dfrac{1}{k} I_n$.

a) Montrer que pour tout $k > 0$, la matrice A_k est symétrique définie positive.

b) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$.

c) En déduire que l'on a encore l'inégalité $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ (on rappelle que l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à M associe $\det(M)$ est continue).