Université de Bordeaux | **MHT 631 – Licence**
Licences math-info et CMI | Année 2020–2021

FEUILLE D'EXERCICES n° 9

Méthodes itératives

Exercice 1 – Le but de cet exercice est de montrer sur des exemples qu'on ne peut rien dire en général de la comparaison entre les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Pour chacune de ces matrices, calculer le rayon spectral de la matrice d'itération correspondant à la méthode de Jacobi, puis de Gauss Seidel (c'est-à-dire $-D^{-1}(L+U)$ et $-(D+L)^{-1}U$ avec les notations du cours).

Remarque. On peut vérifier sur machine les faits suivants.

a) Soit $B_\omega = I - \omega D^{-1}B$ la matrice d'itération de la méthode de relaxation basée sur Jacobi correspondant à la matrice B et au paramètre ω. Vérifier que $\rho(B_{1/2}) = 3/4$.

b) Soit $A_\omega = (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$ la matrice d'itération de la méthode de relaxation basée sur Gauss-Seidel correspondant à la matrice A. Vérifier que $\rho(A_{1/4}) \sim 0.92$.

Exercice 2 – Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$. On considère la méthode itérative définie par $X^{(k+1)} = AX^{(k)} - C$ et par la donnée de $X^{(0)}$.

1) Vérifier que si $(X^{(k)})$ converge, alors elle converge vers $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) On choisit pour initialiser les itérations le vecteur $\begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $X^{(k)}$ en fonction de ε. La suite $(X^{(k)})$ converge-t-elle vers X ?

3) On choisit maintenant $\begin{pmatrix} 1+2\varepsilon \\ 1-9\varepsilon \end{pmatrix}$. Analyser les différences.

Exercice 3 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On considère la matrice A_ω de l'itération de relaxation liée à la méthode de Gauss-Seidel, c'est-à-dire

$$A_\omega = (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U).$$

1) Calculer les valeurs propres de A_ω et son rayon spectral.

2) Pour quelles valeurs de ω la méthode de relaxation converge-t-elle pour tout vecteur initial $X^{(0)}$?

3) Déterminer la valeur de ω pour laquelle $\rho(A_\omega)$ est minimal.

Exercice 4 – Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On utilise la méthode de Jacobi pour résoudre $AX = B$. Montrer que cette méthode converge pour tout vecteur initial.

Exercice 5 – Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On utilise la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre $AX = B$. La matrice d'itération correspondante est donc

$$G = -(D+L)^{-1}U$$

avec les notations du cours. On veut montrer que cette méthode converge pour tout vecteur initial.

1) Pourquoi la matrice D est-elle inversible ?

2) On note $L' = D^{-1}L$ et $U' = D^{-1}U$. Montrer que $G = -(I+L')^{-1}U'$.

3) Soit χ_G le polynôme caractéristique de G. Montrer que

$$\chi_G = \det(X(I+L') + U').$$

4) Soit λ une valeur propre de G. On suppose par l'absurde que $|\lambda| \geqslant 1$.

a) Montrer que pour tout $k \in [[1, n]]$,

$$\sum_{j<k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| + \sum_{j>k} \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| < |\lambda|.$$

b) En déduire que $\det(\lambda(I+L') + U') \neq 0$.

c) Expliquer pourquoi ce résultat est contraire à l'hypothèse et conclure.

Exercice 6 – Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ et un système $AX = B$, on utilise la méthode de relaxation de paramètre $\omega \neq 0$. On itère donc la matrice

$$A_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$$

(notations du cours).

1) Calculer $\chi_{A_\omega}(0)$.

2) Montrer que $\rho(A_\omega) \geqslant |\omega - 1|$ (on pourra faire une estimation du produit des valeurs propres de A_ω).

3) En déduire que si la méthode converge pour tout $X^{(0)}$, alors $0 < \omega < 2$.