

LISTE D'EXERCICES N° 2
(courbure et torsion des courbes)

N.B. : Dans toute la feuille, $\mathbf{E}^n$ désigne l'espace euclidien de dimension $n \geq 2$, muni de sa base naturelle et orienté par cette base.

Exercice 1 (*expressions de la courbure*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{E}^n$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\kappa(t)$ la courbure de cet arc au point $f(t)$.

1. Rappeler l'expression de $\kappa(t)$ en fonction de $f'(t)$ et $f''(t)$.
2. On suppose que $n = 2$. Vérifier que la courbure est aussi donnée par

$$\kappa(t) = \|f'(t)\|^{-3} |\det(f'(t), f''(t))|.$$

3. Applications numériques (courbure dans $\mathbf{E}^2$).
 - 3-a. Calculer la courbure pour $f(t) = R(t + i - ie^{-it})$, $I =]0, 2\pi[$ (quelle est cette courbe?).
 - 3-b. Déterminer la courbure d'une ellipse et donner ses extréma.
 - 3-c. Exprimer la courbure d'un arc régulier donné sous forme polaire par $\rho = \varphi(\theta)$.
 - 3-d. Déterminer la courbure de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos(\theta))$.
 - 3-e. Exprimer la courbure du graphe d'une application $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
 - 3-f. Déterminer la courbure de la parabole d'équation $y = ax^2$ ($a \neq 0$).
4. On suppose que $n = 3$. Vérifier que la courbure est aussi donnée par

$$\kappa(t) = \|f'(t)\|^{-3} \|f'(t) \wedge f''(t)\|.$$

5. Applications numériques (courbure dans $\mathbf{E}^3$).
 - 5-a. Déterminer la courbure d'une hélice de $\mathbf{E}^3$.
 - 5-b. Déterminer la courbure de l'arc $f(t) = (t, t^2, t^3)$ ($t \in \mathbf{R}$).

Exercice 2

1. Montrer qu'un arc régulier de $\mathbf{E}^n$ à courbure nulle est porté par une droite.
2. Prouver qu'un arc régulier de $\mathbf{E}^2$ est à courbure constante si et seulement si c'est un arc de cercle ou de droite.
3. Reconsidérer la question précédente dans $\mathbf{E}^3$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ une parabole du plan euclidien et soit $\mathcal{D}$ sa directrice.

1. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note P le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la normale à $\mathcal{P}$ en M . Exprimer le rayon de courbure de $\mathcal{P}$ en M en fonction de MP .
2. Décrire le lieu des centres de courbure de $\mathcal{P}$. Faire un dessin.

Exercice 4 (*une interprétation de la courbure dans le plan*)

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbf{E}^2$ un arc régulier $\mathcal{C}^2$ paramétré par longueur d'arc. On rappelle qu'il existe une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma'(s) = \exp(i\alpha(s))$ pour tout $s \in I$ (détermination de l'argument de γ'). Prouver que la courbure (algébrique) de l'arc γ au point $\gamma(s)$ vaut $\alpha'(s)$.

Exercice 5

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ un arc paramétré birégulier. On note (τ, ν, β) le repère de Frenet le long de γ , K la courbure et T la torsion de γ .

1. Exprimer les dérivées τ', ν' et β' dans la base (τ, ν, β) en fonction de $\|\gamma'\|$, de K et de T .
2. Vérifier que $\det(\tau, \tau', \tau'') = -\|\gamma'\|^3 K^2 T$. En déduire que la torsion est donnée par

$$T = -\frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}.$$

Exercice 6

Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion des arcs paramétrés suivants :

1. $x(t) = a \cos t, y(t) = a \sin(t), z(t) = bt, t \in [0, 2\pi]$.
2. $x(t) = t, y(t) = \frac{t^2}{2}, z(t) = \frac{t^3}{6}, t \in \mathbf{R}$.
3. $x(t) = e^t, y(t) = e^{-t}, z(t) = \sqrt{2}t, t \in \mathbf{R}$.

Exercice 7

Soit C le support d'une courbe paramétrée birégulière lisse paramétrée par sa longueur d'arc $s \in I \mapsto M(s)$. On note $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ le repère de Frenet au point de paramètre s . On suppose que les plans osculateurs de C passent tous par un même point Ω .

1. Justifier que $\langle \overrightarrow{\Omega M(s)}, \beta(s) \rangle = 0$ pour tout $s \in I$.
2. On se propose de montrer que β est constant sur I . Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe s_0 dans I tel que $\frac{d\beta}{ds}(s_0) \neq 0$.
 - 2-a. Justifier qu'il existe un intervalle J sur lequel $\frac{d\beta}{ds}$ est non nul.
 - 2-b. Montrer $\forall s \in J, \langle \overrightarrow{\Omega M(s)}, \nu(s) \rangle = 0$.
 - 2-c. Montrer $\forall s \in J, \langle \overrightarrow{\Omega M(s)}, \tau(s) \rangle = 0$.
 - 2-d. Conclure.

Exercice 8

Soit (I, γ) un arc lisse, régulier de $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$). On note $N(t)$ l'hyperplan affine passant par $\gamma(t)$ et perpendiculaire à $\gamma'(t)$. Montrer que $\gamma(I)$ est contenu dans une sphère de centre 0 si et seulement si pour tout $t \in I$ le point 0 appartient à l'hyperplan $N(t)$.

Exercice 9

Soit Γ une courbe lisse de $\mathbf{E}^3$. On suppose que Γ est trirégulière paramétrée et par sa longueur d'arc. On note $C(s)$ le centre de courbure à Γ au point de paramètre s et par Γ_1 la courbe paramétrée par $s \mapsto C(s)$. On suppose que Γ est de courbure constante.

1. Montrer que Γ_1 est également de courbure constante. Si $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ et $(\tau_1(s), \nu_1(s), \beta_1(s))$ désignent les repères de Frenet aux points de paramètre s de Γ et Γ_1 , vérifier qu'on a $\tau_1 = \epsilon\beta$, $\nu_1 = -\nu$ et $\beta_1 = \epsilon\tau$, avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$.
 2. Que peut-on dire de la torsion de Γ_1 si Γ est de torsion constante ?
-