Corrigé du DS 2

Exercice 1

1. La matrice d'itération, pour la méthode de Jacobi, est $J = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_J(X) = X(X^2 - \frac{a}{2})$. Ainsi, $\operatorname{Spec}(J) = \{0, \sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\}$ si $a \geq 0$ et $\{0, i\sqrt{\frac{-a}{2}}, -i\sqrt{\frac{-a}{2}}\}$ si $a < 0$. Son rayon spectral est $\rho(J) = \sqrt{\frac{|a|}{2}}$. On en déduit que la suite $(X^{(k)})$ converge pour tout choix de $X^{(0)}$ si et seulement si $|a| < 2$.

2. Pour la méthode de Gauss-Seidel, la matrice de l'itération est $G = -(D+L)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ 0 & -a/4 & a/2 \\ 0 & a/8 & -a/4 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_G(X) = X^2(X - \frac{a}{2})$. Ainsi, $\rho(G) = \frac{|a|}{2}$ et $(X^{(k)})$ converge pour tout choix de $X^{(0)}$ si et seulement si $|a| < 2$.

3. Si $|a| < 2$, $\sqrt{|\frac{a}{2}|} \geq |\frac{a}{2}|$, donc $R(G) \geq R(J)$.

Exercice 2. Soit b la forme bilinéaire symétrique associée à A. On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $e_i = {}^t(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. Alors pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $b(e_i, e_j) = a_{ij}$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet d'écrire : $b(e_i, e_j)^2 \leq b(e_i, e_i)\, b(e_j, e_j)$, et même $b(e_i, e_j)^2 < b(e_i, e_i)\, b(e_j, e_j)$ puisque e_i et e_j sont linéairement indépendants si $i \neq j$. C'est donc que $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj}$.

Exercice 3. 1. Si A est définie positive, il existe $R \in \mathcal{M}_{n,n}^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tRR$. Donc $\det A = (\det R)^2 > 0$.

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_k) \neq 0$ et soit $Y = {}^t(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Alors $Y \neq 0$, donc ${}^tXA_kX = {}^tYAY > 0$. Ainsi, A_k est symétrique définie positive, donc $\det A_k > 0$.

4. $A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff A = \begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $a = {}^t(a_{1n}, \dots, a_{n-1,n})$, de telle sorte que $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ {}^ta & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Alors $A = \begin{pmatrix} {}^tQ Q & {}^tQ C \\ {}^tC Q & \alpha \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\begin{cases} {}^tQ Q = A_{n-1} \\ {}^tQ C = a \\ {}^tC Q = {}^ta \\ \alpha = a_{nn} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} {}^tQ Q = A_{n-1} \\ {}^tQ C = a \\ \alpha = a_{nn} \end{cases}$$

Comme A_{n-1} est défini positive, il existe bien $Q \in \mathcal{T}^{++}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ Q = A_{n-1}$. Soit alors $C = {}^tQ^{-1} a$ et $\alpha = a_{n,n}$.

On a bien $A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5 a) Soit $q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2 + 2 x_n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_j \\ &= (x_1 + \alpha_1 x_n)^2 + \dots + (x_{n-1} + \alpha_{n-1} x_n)^2 + \Big(\alpha - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2\Big) x_n^2 . \end{aligned}$$

Soit $\beta = \alpha - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta \end{pmatrix}$,

$M = {}^tU D U$.

b) M est définie positive si et seulement si $\beta > 0$. Or $\det M = \beta$, d'où on déduit le résultat.

6. On montre le résultat par récurrence. C'est clair si $n = 1$.
Hypothèse de récurrence : si $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et si $\det A_k > 0$ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, alors A est définie positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det A_k > 0$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$. Alors par l'hypothèse de récurrence, A_{n-1} est définie positive. D'après le 4, il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et C un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ tels que $A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et soit $Y = {}^t(x_1, \dots, x_{n-1})$, on voit que
${}^tX A X = ({}^tY {}^tQ, x_n) \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QY \\ x_n \end{pmatrix} = {}^tZ M Z$, où $M = \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}$ est définie positive et où $Z = {}^t(QY, x_n) \neq 0$ (car si $Z = 0$, $QY = 0$, donc $Y = 0$, et $x_n = 0$ et donc $X = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse). Ainsi ${}^tX A X > 0$ et A est définie positive.

7. Dans ce cas, $\beta = 1$. $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ et $D = I_n$.

$M^{-1} = U^{-1} \, {}^tU^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.