Université Bordeaux 1 **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Mathématiques Année 2014–2015

Corrigé du devoir surveillé du 5 novembre 2014
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – Appliquons l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $(A|B)$ concaténée de A et B.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 1 & 5 \\ 10 & 1 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -9 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -9 & -10 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour passer de la seconde à la troisième matrice, on a échangé les lignes 2 et 3, c'est-à-dire qu'on a multiplié à gauche par la matrice de permutation

$$P = P_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc que $PA = LU$ où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

De plus, le système à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} 5x + y + 3z = -1 \\ -y - 9z = -10 \\ 4z = 4, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} z = 1 \\ y = -9 + 10 = 1 \\ x = \frac{1}{5}(-1 - 1 - 3) = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $AX = B$ si et seulement si $X = {}^t(-1, 1, 1)$.

Comme $PA = LU$, $\det P \det A = \det L \det U = -20$. Comme $\det P = -1$, on obtient que $\det A = 20$.

La forme particulière de L permet de trouver tout de suite $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quand à U^{-1}, ses colonnes sont les solutions respectives des équations $UX = e_1$,

$UX = e_2$ et $UX = e_3$, où e_1, e_2, e_3 est la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. Il est clair que la première colonne est égale à ${}^t(1/5, 0, 0)$. On trouve la seconde en résolvant

$$\left\{\begin{aligned} 5x+y+3z &= 0\\ -y-9z &= 1\\ 4z &= 0, \end{aligned}\right. \quad \text{qui donne} \quad \left\{\begin{aligned} &z = 0\\ &y = -1\\ &x = 1/5 \end{aligned}\right.$$

Pour la troisième colonne, on résout

$$\left\{\begin{aligned} 5x+y+3z &= 0\\ -y-9z &= 0\\ 4z &= 1, \end{aligned}\right. \quad \text{qui donne} \quad \left\{\begin{aligned} &z = 1/4\\ &y = -9/4\\ &x = 1/5(9/4-3/4) = 3/10 \end{aligned}\right.$$

Finalement

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 3/10\\ 0 & -1 & -9/4\\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

On calcule enfin $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$, donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/5 & 3/10\\ -1/4 & -1 & -9/4\\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/5\\ -1/4 & -9/4 & -1\\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 –

1) Comme A est à diagonale strictement dominante, A est inversible.

2) $|(AX)_i| = |\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j| = |X_i||a_{ii} + \sum_{j\neq i} a_{ij}X_j/X_i|$ (comme $X \neq 0$, alors $|X_i \neq 0$ et on peut mettre $|X_i|$ en facteur). En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|(AX)_i| \geqslant |X_i|(|a_{ii}| - |\sum_{j\neq i} a_{ij}X_j/X_i|)$$

(ici, on utilise $|x-y| \geqslant |x| - |y|$ avec $x = a_{ii}$ et $y = -\sum_{j\neq i} a_{ij}X_j/X_i$). Comme $|\sum_{j\neq i} a_{ij}X_j/X_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}X_j/X_i|$, on obtient

$$|(AX)_i| \geqslant |X_i|(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}||X_j/X_i|) \geqslant |X_i|(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|)$$

puisque pour tout j, $|X_j/X_i| \leqslant 1$. Cela donne bien le résultat souhaité $|(AX)_i| \geqslant ||X||_\infty \delta$ puisque $||X||_\infty = |X_i|$ et $\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\Big)$.

Comme $||AX||_\infty \geqslant |(AX)_i|$, on en déduit que $||AX||_\infty \geqslant \delta ||X||_\infty$.

3) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ non nul $||X||_\infty \leqslant \delta^{-1}||AX||_\infty$. On en déduit que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ non nul, $||A^{-1}Y||_\infty \leqslant \delta^{-1}||AA^{-1}Y||_\infty = \delta^{-1}||Y||_\infty$ en posant $A^{-1}Y = X$. Cela montre que $|||A^{-1}|||_\infty \leqslant \delta^{-1}$.

4) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\delta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $\delta \geqslant 1$, ce qui entraine que $\delta^{-1} \leqslant 1$. Ainsi, $\mathrm{Cond}_\infty(A) = |||A|||_\infty |||A^{-1}|||_\infty \leqslant |||A|||_\infty$.

Exercice 3 –

1) La multiplication à gauche par S^{-1} multiplie chaque ligne i par μ^{-i}. La multiplication à droite par S multiplie chaque colonne j par μ^j. On en déduit que le coefficient (i,j) de $S^{-1}AS$ est $(S^{-1}AS)_{ij} = \mu^{j-i}a_{ij}$, donc si $i=j$, $(S^{-1}AS)_{ii} = a_{ii}$, si $i=j+1$, $(S^{-1}AS)_{ij} = \mu^{-1}a_{ij}$, si $i=j-1$, $(S^{-1}AS)_{ij} = \mu a_{ij}$ et dans tous les autres cas, $a_{ij}=0$. On en déduit que $S^{-1}AS = D + \mu^{-1}L + \mu U$.

2) $\chi_G(x) = \det\left(xI + (D+L)^{-1}U\right)$, donc

$$\det(D+L)\chi_G(x) = \det\left(x(D+L)+U\right) = \left(\sqrt{x}\right)^n \det\left(\sqrt{x}D + \sqrt{x}L + \frac{1}{\sqrt{x}}U\right).$$

3) Si l'on remplace A par la matrice $\sqrt{x}D + L + U$ et μ par $1/\sqrt{x}$ dans la question 1, on obtient que $\sqrt{x}D + L + U$ est semblable à $\sqrt{x}D + \sqrt{x}L + \frac{1}{\sqrt{x}}U$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\det(D+L)\chi_G(x) &= \left(\sqrt{x}\right)^n \det\left(\sqrt{x}D + L + U\right)\\ &= \left(\sqrt{x}\right)^n \det D \det\left(\sqrt{x}I + D^{-1}(L+U)\right)\\ &= \left(\sqrt{x}\right)^n \det D \chi_J(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Comme $\det(D+L) = \det D \neq 0$, on en déduit que $\chi_G(x) = \left(\sqrt{x}\right)^n \chi_J(\sqrt{x})$.

4) Supposons que $\rho(G) < 1$. Soit alors λ une valeur propre de J. Comme $\chi_J(\lambda) = 0$, l'égalité ci-dessus montre que $\chi_G(\lambda) = 0$, ce qui implique que $|\lambda| < 1$. On en déduit que $\rho(J) < 1$.

Réciproquement, supposons que $\rho(J) < 1$. Soit λ une valeur propre de G. Alors $\chi_G(\lambda) = 0$. Comme $\chi_G(x) = \left(\sqrt{x}\right)^n \chi_J(\sqrt{x})$, soit $\lambda = 0$, soit $\chi_J(\lambda) = 0$. Dans les deux cas, $|\lambda| < 1$, puisque $\rho(J) < 1$.

On a donc démontré que $\rho(G) < 1$ si et seulement si $\rho(J) < 1$. Cela prouve que la méthode de Gauss-Seidel converge pour tout vecteur initial si et seulement si la méthode de Jacobi converge pour tout vecteur initial.