

Exercice 1

1) Comme le polynôme minimal de A est égal à $(A - aI)^2$,
 $(A - aI)^2 = 0$. La décomposition de Dunford de A^t est
 la suivante: $A^t = at I_n + (A - aI_n)^t$.

$$\begin{aligned} \exp(A^t) &= \exp(at I_n) \exp((A - aI_n)^t) \\ &= e^{at} (I_n + (A - aI_n)t) \\ &= e^{at} ((1 - at)I_n + At). \end{aligned}$$

2) Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - 3I)^2 = 0$. Donc:

La solution du système est: $Y(t) = \exp(A^t) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 2+t \\ -1+t \\ 1+t \\ -1-3t \end{pmatrix}$.

Exercice 2 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique
 $|X - 2 \quad -1 \\ -1 \quad X - 2| = (X - 1)(X - 3)$. Soit alors $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$V^t A V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs singulières de A sont
 1 et $\sqrt{3}$. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Soient

$U_1 = A V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} A V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. On veut

compléter (U_1, U_2) en une base orthonormée (U_1, U_2, U_3) de
 $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel. Pour cela, on peut résoudre

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ qui donne: $U_3 \in \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, donc par

exemple: $U_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (On pourrait aussi faire: $U_3 = \pm U_1 \wedge U_2$).

Soit $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Alors $A = U D^t V$. C'est
 une décomposition de A en valeurs singulières.

(2)

Alors: $A^T = V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2) $X_0 = A^T B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. On calcule alors :

$$\|AX_0 - B\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 3

1) a) Si A n'est pas inversible, $\hat{A}$ ne l'est pas non plus. Donc $\text{Ker } \hat{A} \neq \{0\}$ et il existe $C = {}^t(c_1, \dots, c_n)$ non nul tel que $\hat{A}C = 0$.

b) Soit $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x)$. Comme $\hat{A}C = 0$, $Q(x_i) = 0$ pour tout $i \in [1, n]$, donc Q a au moins n racines. Comme $\deg Q \leq n-1$, on en déduit que $Q = 0$. C'est absurde puisque $(P_0, \dots, P_{n-1})$ est une famille libre et $C \neq 0$. On en déduit que A est inversible.

2) a) Comme $\deg R \leq n-1$, $R \in \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$ et donc R s'écrit de façon unique : $R = \sum_{i=0}^{n-1} r_i P_i$.

b) On écrit la division euclidienne de P par P_n : $P = QP_n + R$. Ici, $\deg R \leq n-1$ et $\deg Q = \deg P - \deg P_n \leq n-1$.

$$\begin{aligned} \int_a^b w(t) P(t) dt &= \int_a^b w(t) Q(t) P_n(t) dt + \int_a^b w(t) R(t) dt \\ &= \langle Q, P_n \rangle + \langle R, P_0 \rangle \quad (\text{puisque } P_0 = 1). \\ &= r_0 \langle P_0, P_0 \rangle \quad \left(\text{puisque } R = \sum_{i=0}^{n-1} r_i P_i \text{ et } (P_i/P_0) \text{ est orthogonal aux } P_j \text{ pour } j < i \right). \end{aligned}$$

En effet: $\langle Q, P_n \rangle = 0$ car $\deg Q \leq n-1$.

On a :

$$A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n w_i P_0(x_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n w_i P_{n-1}(x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0, P_0 \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i P(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i Q(x_i) P_n(x_i) + \sum_{i=1}^n w_i R(x_i)$$

(3)

Or les x_i sont les racines de P_n , donc

$$\sum_{i=1}^n w_i Q(x_i) P_n(x_i) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus: } \sum_{i=1}^n w_i A(x_i) &= \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j P_j(x_i) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \sum_{i=1}^n w_i P_j(x_i) \\ &= \lambda_0 \langle P_0, P_0 \rangle \text{ d'après (*)}. \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

Exercice 4.

1) Comme A est symétrique, $\|A\| = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{Spec } A \}$.

En fait, A est positive, donc $\|A\| = \max \text{Spec } A$.

Or: $\|R\| = \sqrt{\max \text{Spec}(R^t R)} = \sqrt{\max \text{Spec } A}$, donc $\|A\| = \|R\|^2$.

De même, $\|A^{-1}\| = \max \text{Spec } A^{-1}$. Quant à R^{-1} :

$\|R^{-1}\| = \sqrt{\max \text{Spec}(R^{-1} R^{-1})}$. Mais on sait que

$\text{Spec}(R^{-1} R^{-1}) = \text{Spec}(R^{-1} R^{-1})$, donc

$$\|R^{-1}\| = \sqrt{\max \text{Spec}(R^{-1} R^{-1})} = \sqrt{\max \text{Spec}((R^t R)^{-1})} = \sqrt{\max \text{Spec } A^{-1}}.$$

Nous avons $\|A^{-1}\| = \|R^{-1}\|^2$.

2) Soit $e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$. $\|R e_i\|^2 = \sum_{j=1}^i \lambda_{ji}^2 \geq \lambda_{ii}^2$

Donc $\|A\| = \|R\|^2 \geq \lambda_{ii}^2$ pour tout i .

3) $\|M^{-1}\| = \max_{y \neq 0} \frac{\|M^{-1}y\|}{\|y\|}$, donc $\frac{1}{\|M^{-1}\|} = \min_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|M^{-1}y\|} = \min_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$

en posant: $x = M^{-1}y$.

4) $\frac{1}{\|R^{-1}\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{\|Rx\|^2}{\|x\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{x^t R R x}{x^t x}$. Soit x tel que $Ux = e_i$.

Alors $x^t U^t U D U x = \lambda_{ii}$. Or: $U^{-1} e_i$ est la i^{e} colonne de U^{-1} , donc sa i^{e} coordonnée est égale à 1. Par conséquent: $x^t x = \|U^{-1} e_i\|^2 \geq 1$.

On en déduit que pour tout i , il existe x tel que $\lambda_{ii} \geq \frac{x^t R R x}{x^t x}$, donc

$$\lambda_{ii}^2 \geq \min_{x \neq 0} \frac{x^t R R x}{x^t x}.$$

5) car $A = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \lambda_{ii}^2 \|R^{-1}\|^2$ (d'après le 2)) pour tout i .

On $\|B^{-1}\|^2 \geq \frac{1}{\min_{i,j} r_{ij}^2}$ pour tout j
d'après 4).

Pour $\text{Cond} A \geq \frac{r_{ii}^2}{\min_{i,j} r_{ij}^2}$ pour tout (i, j)

et $\text{Cond} A \geq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{r_{ii}}{r_{jj}} \right)^2$.

④