Exercice 3

1. $\|A\| = \mu_1$, $\|A^{-1}\| = \mu_n^{-1}$, $\operatorname{cond}(A) = \frac{\mu_1}{\mu_n}$.

2. $A = U D {}^tV$. Soit $U_1 = U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la première colonne de U.

Soit $B = U_1$. Alors l'équation $AX = B$ donne :

$X = V D^{-1} {}^tU U_1 = V D^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme

$V \in O_n(\mathbb{R})$, $\|X\| = \mu_1^{-1} = \|A\|^{-1}$. Comme $\|B\| = \|U_1\| = 1$ (puisque $U \in O_n(\mathbb{R})$), on obtient : $\|B\| = \|A\| \, \|X\|$.

De même, si on pose $\Delta B = U_n$, où $U_n = U \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est la dernière colonne de U, on obtient que si $A \Delta X = \Delta B$, alors $\|\Delta X\| = \|A^{-1}\| \, \|\Delta B\|$. On obtient alors

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \operatorname{cond}(A) \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}.$$

3. Si on choisit $B = U_n$, et si $AX = B$, on obtient, encore de la même façon, que $\|A^{-1}\| . \|B\| = \|X\|$. Comme

$\Delta X = A^{-1} \Delta B$, $\|\Delta X\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\Delta B\|$.

Comme $\|A^{-1}\| = \frac{\|X\|}{\|B\|}$, on obtient que $\|\Delta X\| \leq \|X\| \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$,

donc : $$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}.$$

(ne pas écrire dans cette marge)

Exercice 4

1) $\varphi(\alpha P+\beta Q)=\alpha\varphi(P)+\beta\varphi(Q)$. Pour voir que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de voir que si $\deg P\leq n$, alors $\deg\varphi(P)\leq n$. C'est clair puisque $\deg a\leq 2$ et $\deg b\leq 1$.

2) Comme $a>0$ sur I, $\frac{b-a'}{a}$ est continue sur I. ~~A~~ admet donc une primitive A, qui est donc dérivable sur I. Alors w est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Comme l'image de l'exponentielle ~~$I_m(\ldots)=\mathbb{R}_+^*$~~ est $\mathbb{R}_+^*$, w prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

3) Calculons d'abord $w'(x)=A'(x)e^{A(x)}=\frac{(b-a')(x)}{a(x)}w(x)$.

Ainsi, $w'=\frac{b-a'}{a}w$.

$$(awP')'=a'wP'+aw'P+awP''$$
$$=a'wP'+(b-a')wP+awP''$$
$$=bwP+awP.$$

On en déduit que $\varphi(P)=\frac{1}{w}(awP')'$

4) $$<\varphi(P),Q>=\int_\alpha^\beta(awP')'(t)\,Q(t)\,dt$$
$$=\left[(awP'Q)(t)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta(awP')(t)\,Q'(t)\,dt$$
$$=<P,\varphi(Q)>.$$

5) Si on écrit la matrice de φ_n dans la base $(1,X,\ldots,X^n)$, on ~~trouvait~~ que cette matrice est triangulaire supérieure. Donc, les termes de la diagonale sont des valeurs propres $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$, qui sont deux à deux distinctes. Soient λ,μ deux valeurs propres et P,Q deux vecteurs propres correspondants. Alors $\lambda<P,Q>=<\varphi(P),Q>=<P,\varphi(Q)>=\mu<P,Q>$. Donc : $<P,Q>=0$. ~~Reste à voir que pour tout i~~

Ainsi, les espaces propres sont deux à deux orthogonaux. On en déduit qu'il existe une base orthogonale $(B_0,\ldots,B_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(ne pas écrire dans cette marge)

Reste à voir que pour tout i, $\deg B_i = i$.

~~Pr~~ Pour $n=0$, c'est clair. On suppose que c'est vrai pour $n-1$. Alors $B_0, \dots, B_{n-1}$ sont aussi vecteurs propres ~~de~~ de φ_n. Comme B_n doit être linéairement indépendant de $B_0, \dots, B_{n-1}$ et que $\mathrm{Vect}(B_0, \dots, B_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\deg B_n = n$.

6) C'est clair.

7) On pose $a = \cancel{1}$, $b = \cancel{x}$ Alors $\frac{b-a'}{a} = \frac{\cancel{x}}{1} = -x$.

Soit alors $w = e^{-\frac{x^2}{2}}$. La suite (H_n) des polynômes orthogonaux ~~as~~ associée à w est constituée des vecteurs propres de φ, où $\varphi(P) = P'' - xP'$.

On : $\varphi(x^k) = k(k-1)x^{k-1} - kx^k$. Les éléments diagonaux de la matrice de φ_n dans $(1, X, \dots, X^n)$ sont donc : $0, -1, \dots, -n$: ce sont aussi les valeurs propres de φ_n. On en déduit que

$$H_n'' - xH_n' = -nH_n,$$

et donc que H_n est solution de

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

8) On exploite cette équation différentielle. Elle nous donne l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)h_k x^{k-2} - x\sum_{k=0}^{n} k h_k x^{k-1} + n\sum_{k=0}^{n} h_k x^k = 0$$

donc $$\sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{n} k h_k x^k + n\sum_{k=0}^{n} h_k x^k = 0$$

Ainsi, pour $k \in [\![0, n-2]\!]$,

$$h_{k+2} = -\frac{n-k}{(k+2)(k+1)} h_k.$$

$$h_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{n-k} h_{k+2}.$$

~~Le coeff~~ Si l'on considère le coefficient de x^{n-1}, on trouve :

$$(-(n-1)+n)h_{n-1} = 0 \quad \text{donc} \quad h_{n-1} = 0.$$

(ne pas écrire dans cette marge)

Ainsi, pour tout k impair, $h_{n-k} = 0$.

Pour k pair :

$$h_{n-k} = -\frac{(n-(k+1))(n-k+2)}{n-k} h_{n-k+2}$$

$$= (-1)^k \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)\,n}{k\,(k-2)\cdots(2)}$$

$$= \frac{(-1)^k\, n!}{(n-k)!\, 2^{k/2} \left(\frac{k}{2}\right)!}$$

Remarque. On sait que $H_n = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$.

On peut à titre d'exercice vérifier à partir de cette expression que $H_n'' - x H_n' + n H_n = 0$.

De plus, il est clair que H_n est pair si n est pair et impair si n est impair. Cela prouve que $h_{n-k} = 0$ si k est impair.