REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur de MATHAN m'a fait découvrir, pendant la préparation de mon D.E.A., l'approximation diophantienne et en particulier les travaux de F. Dyson et de A. Thue. Il a dirigé cette thèse et a participé étroitement à l'obtention de plusieurs résultats. Je veux lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Je remercie J-P. ALLOUCHE et M. WALDSCHMIDT pour l'interêt qu'ils ont porté à ce travail et pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

M. MENDÈS-FRANCE me fait l'honneur de présider le jury, je le remercie vivement.

Mes remerciements vont également à H. COHEN et Y. HELLEGOUARCH pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin je remercie les étudiants de l'école doctorale qui m'ont souvent aidé devant l'ordinateur, et tout particulièrement Nicolas BRISEBARRE, ainsi que le personnel qui a assuré la réalisation matérielle de ce travail.

Qu'il me soit permis d'avoir une pensée pour le Professeur N. BAGANAS qui a su me passionner pour les mathématiques.

Je dédie cette thèse à Béatrice, Sabine, Clement et Mathieu qui ont fait preuve de beaucoup de patience pendant la préparation de ce travail.

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

A. Lasjaunias

TABLE DES MATIÈRES

L'exposant d'approximation et le développement en fraction continue

INTRODUCTION

L'origine de notre étude se trouve dans l'approximation rationnelle des nombres réels algébriques. Il a été remarqué par Liouville, vers 1850, que la précision de l'approximation rationnelle des nombres réels algébriques a une limite évidente : si α est un nombre algébrique irrationnel de degré n, alors

$$(1) \qquad |\alpha - p/q| \geq A/q^n$$

pour tout rationnel p/q, où A est une constante réelle positive ne dépendant que de α. Ce résultat fut le point de départ d'une recherche du plus grand nombre réel positif r tel que l'inégalité

$$(2) \qquad |\alpha - p/q| < 1/q^r$$

ait une infinité de solutions rationnelles p/q. Si r_0 est cette borne supérieure, le théorème de Liouville montre que $r_0 \leq n$ et l'approximation d'un nombre réel par les réduites de son developpement en fraction continue montre que $r_0 \geq 2$. A. Thue en 1908 [16], fut l'initiateur de cette recherche en prouvant que $r_0 \leq n/2+1$. Après les contributions célèbres de Siegel et Dyson, la conclusion revint à K. Roth avec son théorème prouvé en 1955 [14], qui affirme que si α est un nombre algébrique irrationel et si (2) a une infinité de solutions, alors $r \leq 2$. Ainsi $r_0 = 2$ et est indépendant de n et de α.

La théorie de l'approximation rationnelle des nombres réels algébriques a été transposée aux corps de fonctions ([8], [4]) et c'est dans ce cadre que se situe notre étude. Si K est un corps, nous considérons l'anneau $K[T]$ des polynômes, et le corps $K(T)$ des fonctions rationnelles, à coefficients dans K, de la variable T. Nous plongeons le corps $K(T)$ dans le corps $K((T^{-1}))$ des séries formelles de Laurent. Si $\alpha = \sum_{k \leq k_0} a_k T^k$ est un élément de $K((T^{-1}))$, avec $a_{k_0} \neq 0$, nous introduisons le degré de α, noté $\deg \alpha = k_0$, et la valeur absolue ultramétrique $|\alpha| = |T|^{\deg \alpha}$ et $|0| = 0$, avec $|T| > 1$. Ainsi le corps $K((T^{-1}))$ s'identifie au complété de $K(T)$, pour cette valeur absolue. Il a été remarqué, dès 1960 [17], que le théorème de Roth se transpose dans ce cadre, sous réserve que l'on suppose la caractéristique de K nulle. Dans toute cette étude nous faisons l'hypothèse contraire, c'est-à-dire que nous considérons que K est un corps de caractéristique p, où p est un nombre premier arbitraire.

En 1949, K. Mahler [7] a montré la singularité de ce cas. Il remarque que l'analogue du théorème de Liouville demeure : si α est un élément de $K((T^{-1}))$ algébrique sur $K(T)$, de degré $n > 1$, alors

$$(1') \qquad |\alpha - P/Q| \geq A/|Q|^n$$

pour tout élement P/Q de $K(T)$, où A est une constante réelle positive ne dépendant que de α. Il souligne que ce résultat ne peut etre amélioré en général, dans le cas qui nous intéresse, en donnant l'exemple d'un élément α de $K((T^{-1}))$ algébrique de degré p sur $K(T)$, où p est la caractéristique de K, vérifiant $|\alpha - P_n/Q_n| = |Q_n|^{-p}$ pour une suite $(P_n/Q_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $K(T)$ avec $\lim_n |Q_n| = \infty$. Cet élément satisfait l'équation algébrique $\alpha^p - \alpha + 1/T = 0$.

Dès lors il apparaît que l' analogue du théorème de Roth est faux, ou plus précisement que certains éléments y font exception. Ceci nous conduit, afin de mesurer la qualité de l'approximation rationnelle d'un élément de $K((T^{-1}))$, à introduire les définitions suivantes.

Pour $x \in K((T^{-1}))$ il existe un polynôme $y \in K[T]$ tel que $|x - y| < 1$. Ce polynôme est appelé partie entière de x, et nous noterons $y = E(x)$. Nous notons $||x||$ la quantité $|x - E(x)|$. Soit α un élément irrationnel de $K((T^{-1}))$. Pour tout nombre réel μ, nous définissons

$$B(\alpha, \mu) = \liminf_{|Q|\to\infty} |Q|^{\mu} ||Q\alpha||$$

et l'exposant d'approximation de α est défini par

$$\nu(\alpha) = \sup\{\mu \mid B(\alpha, \mu) < \infty\}.$$

Ces notations sont dues à B. de Mathan [9].

Nous savons que la théorie du développement en fraction continue d'un nombre réel se transpose aux séries formelles. En effet, si α est un élement irrationnel de $K((T^{-1}))$, alors il peut être développé en une fraction continue, que nous noterons $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, où les quotients partiels a_k sont des éléments de $K[T]$ et deg $a_k > 0$ pour $k > 0$. Si $(P_k/Q_k)_{k\geq 0}$ est la suite des réduites de α, nous avons

$$|\alpha - P_k/Q_k| = |Q_k Q_{k+1}|^{-1} = |a_{k+1}|^{-1}|Q_k|^{-2}.$$

Nous voyons donc que $B(\alpha, 1) \leq |T|^{-1}$ et $\nu(\alpha) \geq 1$. De plus, les meilleures approximations rationnelles de α étant ses réduites, on a

$$\nu(\alpha) = \limsup_k \deg Q_{k+1}/\deg Q_k.$$

D'autre part le théorème de Liouville s'exprime par $\nu(\alpha) \leq n-1$ si α est un élément algébrique sur $K(T)$, de degré $n > 1$. Ainsi tout élément de $K((T^{-1}))$ algébrique sur $K(T)$, de degré $n > 1$, a un exposant d'approximation $\nu(\alpha)$ appartenant à l'intervalle $[1, n-1]$. Observons que les deux bornes de cet intervalle peuvent être atteintes comme le montrent l'exemple d'un élément quadratique et l'exemple de l'élément cité plus haut. En outre il est clair que

$$B(\alpha, \mu) = \infty \text{ si } \mu > \nu(\alpha), \ B(\alpha, \mu) = 0 \text{ si } \mu < \nu(\alpha) \text{ et } 0 \leq B(\alpha, \nu(\alpha)) \leq \infty.$$

On est alors conduit à se demander si l'exemple introduit par Mahler (exposant d'approximation maximal) est exceptionnel. En 1975, un autre exemple fut donné par C. Osgood [13]. En étudiant le cas $K = \mathbb{F}_2$, L. Baum et M. Sweet ([1], [2]), ont donné un nouvel exemple satisfaisant de façon optimale le théorème de Liouville. Ils donnent également des exemples d'éléments non quadratiques ayant les quotients partiels du développement en fraction continue bornés (donc $\nu(\alpha)=1$ et $B(\alpha,1)>0$). Ensuite W. Mills et D. Robbins ([11]) ont remarqué que la plupart de ces éléments étaient liés à la transformation $f(X)=(AX^q+B)/(CX^q+D)$, composée d'une homographie à coefficients dans $K[T]$ et de l'homomorphisme de Frobenius $h_q(X)=X^q$ où q est une puissance de la caractéristique p de K. Ceci les a conduits à introduire une méthode permettant d'obtenir le développement en fraction continue explicite de certains éléments algébriques de $K((T^{-1}))$. Ainsi ils donnent d'autres exemples d'éléments non quadratiques ayant les quotients partiels du développement en fraction continue bornés, en toute caractéristique $p>2$.

Il est apparu progressivement que les éléments de $K((T^{-1}))$ satisfaisant une équation algébrique de la forme

$$(3) \qquad X=(AX^{p^s}+B)/(CX^{p^s}+D)$$

avec A,B,C,D dans $K[T]$, $AD-BC\neq 0$ et $s\geq 1$, p étant la caractéristique de K, méritaient une étude particulière. Nous utiliserons les notations suivantes. L'ensemble des éléments, algébriques irrationnels de $K((T^{-1}))$, satisfaisant une équation algébrique de la forme (3), pour un entier s donné est noté $\mathcal{H}_s$. On pose alors $\mathcal{H}=\bigcup_{s\geq 1}\mathcal{H}_s$. Remarquons que si $\alpha\in\mathcal{H}_s$ alors il existe une homographie, f, à coefficients dans $K[T]$, telle que $\alpha=f(\alpha^{p^s})$ et l'on obtient, par itération, $\alpha=g_k(\alpha^{p^{ks}})$ où g_k est une homographie à coefficients dans $K[T]$. Ainsi nous avons $\mathcal{H}_s\subset\mathcal{H}_{ks}$, pour tout $k\geq 1$. On peut remarquer que si α est un élément de $K((T^{-1}))$, algébrique sur $K(T)$, de degré $n=2$ ou 3, alors $\alpha\in\mathcal{H}_1$. En effet $1,\alpha,\alpha^p$ et α^{p+1} sont liés sur $K(T)$. D'autre part nous verrons que $\mathcal{H}$ ne coincide pas avec l'ensemble des éléments algébriques irrationnels de $K((T^{-1}))$. Les éléments de $\mathcal{H}$ seront dit de type Homographie-Frobenius. Ces élements ont été étudiés en particulier par J. Voloch et B. de Mathan ([18], [9]). Un des résultats importants est que l'on a, pour tout élément α de ce type, $B(\alpha,\nu(\alpha))\neq 0,\infty$. De plus B. de Mathan a développé une méthode [9] qui permet le calcul explicite de $\nu(\alpha)$, si ce nombre est assez grand.

La première partie de ce travail est consacrée à un théorème, établi en collaboration avec B. de Mathan, et publié au Journal de Crelle [6]. Ce travail montre la spécificité des éléments de type Homographie-Frobenius. Il s'agit d'un analogue du célèbre théorème de Thue, établi en 1908 ([16]), selon lequel si α est un nombre algébrique réel de degré $n>1$ alors, pour tout $\epsilon>0$, nous avons

$$|\alpha-p/q|\geq q^{-(n/2+1+\epsilon)}$$

pour tout rationnel p/q, avec q assez grand. Nous montrons ici que si α est un élément de $K((T^{-1}))$, algébrique sur $K(T)$, de degré $n>1$ et $\alpha\notin\mathcal{H}$, alors pour tout $\epsilon>0$, nous avons

$$|\alpha-P/Q|\geq|Q|^{-([n/2]+1+\epsilon)}$$

pour tout rationnel $P/Q\in K(T)$, avec $|Q|$ assez grand.

Dans la deuxième partie on utilise la méthode différentielle. Le fait que l'on puisse introduire une dérivation dans $K((T^{-1}))$ implique que tout élément, algébrique sur $K(T)$, vérifie une équation algébrico-différentielle. L'étude de l'approximation rationnelle des solutions d'une équation algébrico-différentielle a été commencée par E. Kolchin [5]. En 1974, C. Osgood a établi un théorème d'approximation rationnelle pour des fonctions algébriques qui ne sont pas solutions d'une équation différentielle de Riccati [13]. Nous en redonnons une démonstration, avec un résultat un peu plus précis. Ensuite nous montrons le lien entre un élément de type Homographie-Frobenius et l'équation différentielle de Riccati. Nous montrons alors, en reprenant un argument de Voloch, que, dans le cas où K est fini, la méthode d'Osgood permet aussi de démontrer le théorème "de Thue", avec de plus des estimations effectives. Puis nous nous intéressons aux équations différentielles de Riccati et en déduisons des propriétés d'approximation rationnelle pour certains élements. Pour terminer ce chapitre, nous donnons un résultat concernant des éléments de $\mathcal{H}$, algébriques de degré 4, sur $K(T)$.

Dans la dernière partie nous donnons, d'abord, quelques résultats concernant l'exposant d'approximations de certains éléments algébriques de $K((T^{-1}))$. On donne, en particulier, une condition pour qu'une racine n-ième d'un élément rationnel ait un exposant d'approximation maximal. Ensuite nous étudions un très curieux exemple qui a été donné récemment par Buck et Robbins (Journal of Number Theory 1995). Ces auteurs ont trouvé le développement en fraction continue explicite d'un élément qui ne rentre dans aucune catégorie précédemment connue (en particulier, il s'agit d'un élément algébrique qui n'est pas dans $\mathcal{H}$). Curieusement, Buck et Robbins n'ont pas cherché à étudier l'approximation rationelle de cet élément. On peut montrer que cet élément, α, vérifie le théorème de Roth, i.e. $|\alpha - P/Q| >> |Q|^{-2-\epsilon}$, pour tout $\epsilon > 0$, mais pas $|\alpha - P/Q| >> |Q|^{-2}$. C'est le premier exemple de ce type connu. Nous considérons la suite d'éléments de $\mathcal{H}$, $(\alpha_q)_q$, indexée par q, où q est une puissance d'un nombre premier p impair et α_q est la solution dans $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ de l'équation $X = 1/(T + X^q)$. Nous considérons alors l'élément $\theta_q = \alpha_q^{(q+1)/2}$. L'élément de Buck et Robbins est $\theta_3(\sqrt{T})$. Pour $q = 3$, nous donnons une méthode nouvelle pour en obtenir le développement en fraction continue. Dans le cas général, pour $q > 3$, nous donnons seulement une description partielle du développement en fraction continue de θ_q, qui nous permet de conjecturer que cet élément a les mêmes propriétés d'approximation rationnelle que θ_3. Pour terminer cette partie, nous donnons le développement en fraction continue du célèbre exemple de K. Mahler, déjà mentionné. Ces derniers travaux font l'objet d'un article à paraître prochainement dans la revue Journal of Number Theory.

CHAPITRE I
La méthode de Thue en caractéristique positive

§1. Sur l'approximation rationnelle des éléments algébriques de $K((T^{-1}))$ qui ne sont pas de type Homographie-Frobenius.

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème I.1 ci-dessous. Ce théorème est obtenu par une adaptation du célèbre théorème de A.Thue, démontré en 1908. Ce dernier théorème ne se transpose pas dans $K((T^{-1}))$, avec $\mathrm{car}(K) > 0$, car nous savons qu'il existe des éléments, algébriques sur $K(T)$, qui sont trop bien approchables par des rationnels. La première adaptation consiste donc à trouver une condition restrictive. Il est normal de penser à écarter les éléments, algébriques sur $K(T)$, qui appartiennent à $\mathcal{H}$. D'autre part, nous avons dû renoncer à l'utilisation du calcul différentiel à cause de la caractéristique positive.

THÉORÈME I.1. *Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Soit α un élément de $K((T^{-1}))$, algébrique sur $K(T)$, de degré $n > 1$. Supposons que $\alpha \notin \mathcal{H}$. Alors pour tout nombre réel positif ϵ, et pour tout couple (P, Q) de $K[T] \times K[T]$, avec deg Q assez grand, nous avons*

$$\mid P - \alpha Q \mid \geq \mid Q \mid^{-([n/2]+\epsilon)}$$

Remarque. Ici on a $n \geq 4$ car sinon $\alpha \in \mathcal{H}$. D'autre part nous observons, avec les notations utilisées dans l'introduction, que la conclusion du théorème est équivalente à $\nu(\alpha) \leq [n/2]$.

D'abord, il est possible de supposer que α est un entier algébrique sur $K[T]$. Éventuellement en remplaçant α par $\alpha - E(\alpha)$, nous pouvons aussi supposer que deg $\alpha < 0$. En effet si $A \neq 0$ et B sont deux éléments de $K[T]$ alors l'inégalité $\mid \alpha - P/Q \mid \geq \mid Q \mid^{-([n/2]+1+\epsilon)}$, pour $|Q|$ assez grand, entraîne $\mid A\alpha + B - P'/Q \mid \geq |A| \mid Q \mid^{-([n/2]+1+\epsilon)} \geq \mid Q \mid^{-([n/2]+1+\epsilon')}$, pour $|Q|$ assez grand et pour tout $\epsilon' > \epsilon$. Donc si le théorème est vrai pour α il l'est pour $A\alpha + B$.
Alors il existe des coefficients $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, dans $K[T]$ tels que $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_0 = 0$. Nous posons $F(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in K[T][X]$.

La preuve fait appel à plusieurs lemmes. Le premier lemme est analogue au lemme de Siegel :

LEMME I.1. *Soient M et N des entiers positifs, avec $M < N$. Considérons un système (S) de M équations à N inconnues*

$$(S) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i = 0 \quad (1 \leq j \leq M)$$

où a_{ij} sont des éléments $K[T]$. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque i, j nous avons $\deg\ a_{ij} \leq d$. *Alors (S) a une solution non triviale $(x_i)_{1\leq i\leq N} \in (K[T])^N$ avec* deg $x_i \leq Md/(N-M)$ *pour $1 \leq i \leq N$.*

Preuve . Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit E_k l'ensemble des polynômes $x \in K[T]$ avec deg $x \leq k$. Cet ensemble est un K-espace vectoriel de dimension $k+1$. Posons $d' = [Md/(N-M)]$. Nous avons une application linéaire $\varphi : E_{d'}^N \longrightarrow E_{d+d'}^M$ telle que $\varphi((x_i)_{1\leq i\leq N}) = (\sum_{i=1}^N a_{ij}x_i)_{1\leq j\leq M}$. Comme $d' > (Md)/(N-M) - 1$, nous avons

$$\dim E_{d'}^N = N(d'+1) > M(d+d'+1) = \dim E_{d+d'}^M$$

donc nous pouvons en conclure que $\ker \varphi \neq \{0\}$. Alors il existe $(x_i)_{1\leq i\leq N} \in E_{d'}^N$, différent de $(0,0,...,0)$, tel que $\sum_{i=1}^N a_{ij}x_i = 0$, pour chaque j, avec deg $x_i \leq d'$ pour chaque i.

Maintenant nous allons utiliser des polynômes $G \in K[T][X]$. Pour un tel polynôme, nous notons $\deg_X\ G$ le degré de G, considéré comme un polynôme en X à coefficients dans $K[T]$. Nous notons $\deg_T\ G$ le maximum des degrés de ces coefficients dans $K[T]$ (i.e., le degré de G, considéré comme un polynôme en T à coefficients dans $K[X]$).

LEMME I.2. *Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, il existe $F_m \in K[T][X]$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) $\deg_X\ F_m \leq n-1$

(2) $\alpha^m = F_m(\alpha)$

(3) $\deg_T\ F_m \leq C_1 m$

où C_1 est une constante positive réelle.

Preuve . Les conditions (1) et (2) déterminent les polynômes F_m. Posons

$$F_m(X) = \sum_{k=0}^{n-1} f_{k,m}X^m, \quad \text{où} \quad f_{k,m} \in K[T].$$

Pour $m \leq n-1$, nous avons $F_m(X) = X^m$, et pour chaque $m \geq 0$

$$F_{m+1}(X) = XF_m(X) - f_{n-1,m}F(X).$$

Alors il est clair que l'on a, par récurrence sur m, l'inégalité (3), avec $C_1 = \deg_T\ F$.

Dans la méthode originale de Thue, on construit deux polynômes U et V de $\mathbb{Z}[X]$ tels que le polynôme $U - \alpha V$ s'annule en α avec un grand ordre. Ici ceci est réalisé en utilisant des polynômes s'annulant en α^{p^s}.

LEMME I.3. *Pour tout couple (k,s), où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$ et s est un entier positif, il existe des polynômes non nuls $U_{k,s}, V_{k,s} \in K[T][X]$ satisfaisant les conditions suivantes :*

$$\begin{array}{ll}
(4) & U_{k,s}(\alpha^{p^s}) - \alpha V_{k,s}(\alpha^{p^s}) = 0 \\
(5) & \deg_X\ U_{k,s} \leq k \ \ et\ \ \deg_X\ V_{k,s} \leq n-k-1 \\
(6) & U_{k,s}\ \ et\ V_{k,s}\ \ sont\ premiers\ entre\ eux\ dans\ K[T][X] \\
(7) & \deg_T\ U_{k,s} \leq C_2 p^s\ \ et\ \deg_T\ V_{k,s} \leq C_2 p^s
\end{array}$$

où C_2 est une constante réelle positive.

Preuve . D'abord nous déterminons un couple $(U^0_{k,s}, V^0_{k,s})$ de polynômes de $K[T][X]$, non tous deux nuls, satisfaisant $(4), (5)$ et (7). En utilisant le lemme I.2, nous voyons que la condition (4) peut être écrite comme un système de n équations linéaires, dont les inconnues sont les $n+1$ coefficients des deux polynômes $U^0_{k,s}$ et $V^0_{k,s}$. Les coefficients de ce système linéaire sont des polynômes de $K[T]$, avec des degrés au plus $C_1 \max(kp^s, (n-k-1)p^s+1) \leq nC_1p^s$. Alors le Lemme I.1 entraîne l'existence de polynômes $U^0_{k,s}$ et $V^0_{k,s} \in K[T][X]$, satisfaisant (4),(5) et (7), avec $C_2 = n^2 C_1$.

Maintenant, comme il est bien connu que l'extension $K(T)(\alpha)$ de $K(T)$ est séparable, nous avons nécessairement $K(T)(\alpha^{p^s}) = K(T)(\alpha)$. Ainsi l'élément algébrique α^{p^s} a le même degré, n, que α. Alors si W est un polynôme non nul de $K[T][X]$ avec $\deg_X\ W < n$, nous avons $W(\alpha^{p^s}) \neq 0$. Nous utilisons cette remarque, en prenant pour W le P.G.C.D. de $U^0_{k,s}$ et $V^0_{k,s} \in K[T][X]$. Posons $U^0_{k,s} = U_{k,s}W$ et $V^0_{k,s} = V_{k,s}W$. Nous déduisons de (4)

$$(U_{k,s}(\alpha^{p^s}) - \alpha V_{k,s}(\alpha^{p^s}))W(\alpha^{p^s}) = 0.$$

Comme $\deg_X\ U^0_{k,s} = \deg_X\ U_{k,s}\ + \deg_X\ W$, et aussi pour V, nous avons $\deg_X\ W < n$, et par conséquent $W(\alpha^{p^s}) \neq 0$. Il s'en suit que

$$(4) \qquad U_{k,s}(\alpha^{p^s}) - \alpha V_{k,s}(\alpha^{p^s}) = 0.$$

Vu que $\deg_X\ U_{k,s} \leq \deg_X\ U^0_{k,s}$, et la même chose en T, et pour V, les conditions (5) and (7) sont encore satisfaites. Enfin $U_{k,s}$ et $V_{k,s}$ sont tous les deux non nuls. Par exemple, si $V_{k,s} = 0$, nous aurions $U_{k,s}(\alpha^{p^s}) = 0$, d'où $U_{k,s} = 0$, puisque $U_{k,s}$ a un degré en X plus petit que n.

Observons que les polynômes $U_{k,s}$ et $V_{k,s}$ sont déterminés de façon unique, modulo K^*, par les conditions (4), (5) et (6). En effet, si $(\tilde{U}_{k,s}, \tilde{V}_{k,s})$ est un autre couple de polynômes satisfaisant ces trois conditions, la condition (4) implique $U_{k,s}(\alpha^{p^s})\tilde{V}_{k,s}(\alpha^{p^s}) - \tilde{U}_{k,s}(\alpha^{p^s})V_{k,s}(\alpha^{p^s}) = 0$. Comme (5) entraîne deg $(U_{k,s}\tilde{V}_{k,s} - \tilde{U}_{k,s}V_{k,s}) < n$, nous devons avoir $U_{k,s}\tilde{V}_{k,s} - \tilde{U}_{k,s}V_{k,s} = 0$, puisque α^{p^s} est de degré n sur $K(T)$. Alors (6) implique qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $\tilde{U}_{k,s} = \lambda U_{k,s}$ et $\tilde{V}_{k,s} = \lambda V_{k,s}$.

Comme dans la méthode originale de Thue, nous utilisons les polynômes $U_{k,s}$ et $V_{k,s}$ pour construire, à partir d'une approximation rationelle, P/Q, donnée de α, une nouvelle approximation rationnelle de α :

$$U_{k,s}((P/Q)^{p^s})/V_{k,s}((P/Q)^{p^s}).$$

Il sera nécessaire de prendre max ($\deg_X U_s, \deg_X V_s$) aussi petit que possible. Par conséquent, dans la suite, nous utilisons le lemme I.3 avec $k = [n/2]$. Nous posons

$$U_s = U_{[n/2],s}\ , \quad V_s = V_{[n/2],s} \quad \text{et} \quad \mu_s = \max\,(\deg_X U_s, \deg_X V_s).$$

Ainsi nous avons $\deg_X U_s \leq [n/2]$ et $\deg_X U_s \leq n - [n/2] - 1 \leq [n/2]$, donc $\mu_s \leq [n/2]$.

LEMME I.4. *Pour chaque entier positif s, soient U_s et V_s les deux polynômes de $K[T][X]$, définis ci-dessus. Soit (P, Q) un couple de $K[T] \times (K[T]\backslash\{0\})$ avec* $\deg\,(P - \alpha Q) < 0$. *Nous définissons A_s et B_s, éléments de $K[T]$, par*

$$A_s = Q^{\mu_s p^s} U_s((P/Q)^{p^s}) \quad et \quad B_s = Q^{\mu_s p^s} V_s((P/Q)^{p^s}).$$

Alors nous avons :

$$(8) \qquad \deg\, B_s \leq (C_2 + \mu_s \deg\, Q)p^s$$

et

$$(9) \qquad \deg\,(A_s - \alpha B_s) \leq (C_2 \ + (\mu_s - 1)\deg Q \ +\deg\,(P - \alpha Q))p^s.$$

Preuve . Comme $\deg\,(P/Q - \alpha) < 0$, nous avons $\deg\,(P/Q) < 0$ vu que $\deg\, \alpha < 0$. Alors, par (7) $\deg\, V_s((P/Q)^{p^s}) \leq C_2 p^s$. Par conséquent , $\deg\, B_s \leq C_2 p^s + \mu_s p^s \deg\, Q$, et (8) est prouvé. Pour établir (9) nous observons que

$$\deg\,(U_s(\alpha^{p^s}) - U_s((P/Q)^{p^s})) \leq C_2 p^s \ + p^s \deg\,(\alpha - P/Q).$$

En effet, comme $\deg\, \alpha$ et $\deg\,(P/Q)$ sont négatifs, nous avons, pour tout entier positif j, $\deg\,(\alpha^{jp^s} - (P/Q)^{jp^s}) \leq p^s \deg\,(\alpha - P/Q)$. Alors (4) entraîne

$$\deg\,(U_s((P/Q)^{p^s}) - \alpha V_s((P/Q)^{p^s})) \leq C_2 p^s \ + p^s \deg\,(\alpha - P/Q)$$

et ceci donne immédiatement (9).

Dans la méthode classique de Thue, l'idée est de “classer” cette nouvelle approximation A_s/B_s construite au lemme 4, parmi d'autres approximations rationnelles de α. En fait ce classement sera impossible si l'on part d'une trop bonne approximation P/Q. Mais il est nécessaire d'avoir pour chaque s, deux approximations distinctes $A_{s,1}/B_{s,1}$ et $A_{s,2}/B_{s,2}$. Ceci est un point critique. Une telle démarche est aussi possible ici (en utilisant deux valeurs distinctes de k dans le lemme I.3). Mais, en suivant cette voie, on obtient seulement

$$|\ P - \alpha Q\ | \geq |\ Q\ |^{-(n-2+\epsilon)}$$

pour $|Q|$ suffisamment grand. Nous obtiendrons un meilleur résultat en estimant le degré du dénominateur “exact” de A_s/B_s. Cela fait l'objet des deux lemmes suivants.

LEMME I.5. *Soient U et V des polynômes non nuls de $K[T][X]$, premiers entre eux dans $K(T)[X]$. Posons $m = \deg_X U$ et $m' = \deg_X V$. Soit M un entier positif. Supposons que U et V soient de degré M au plus, en T.*

Alors il existe des polynômes $\Delta \in K[T]$, $\Delta \neq 0$, R et S de $K[T][X]$, tels que :

$$(10) \qquad RU + SV = \Delta$$

$$(11) \qquad \deg \Delta \leq (m+m')M$$

$$(12) \qquad \deg_X R < m' \text{ et } \deg_X S < m$$

$$(13) \qquad \deg_T R \leq (m+m'-1)M \text{ et } \deg_T S \leq (m+m'-1)M.$$

Preuve . Comme U et V sont premiers entre eux dans $K(T)[X]$, U et V, considérés comme des polynômes en X à coefficients dans $K(T)$, ont un résultant non nul $\Delta \in K[T]$. Il est bien connu qu'il existe des polynômes en X, R et S, satisfaisant les conditions (10) et (12). Comme Δ est un déterminant à $m + m'$ lignes de polynômes en T de degrés n'excédant pas M, (11) est vérifié. Les coefficients des polynômes en X, R et S sont, au signe près, des sous-déterminants, à $m + m' - 1$ lignes, du résultant. Par conséquent, ces coefficients ont un degré en T au plus égal à $(m + m' - 1)M$. Ainsi (13) est établi.

LEMME I.6. *Avec les mêmes notations que dans le lemme I.4, il existe une constante réelle positive C_3, dépendant seulement de α, telle que les conditions suivantes soient satisfaites :*

Pour tout couple (P, Q) de polynômes premiers entre eux dans $K[T]$, avec $\deg Q \geq C_3$ et $\deg (P - \alpha Q) < 0$, nous avons :

$$(14) \qquad \deg B_s \geq (\mu_s \deg Q - C_3)p^s$$

et, si D_s est le plus grand commun diviseur (unitaire) de A_s et B_s dans $K[T]$,

$$(15) \qquad \deg D_s \leq C_3 p^s.$$

Preuve . Comme U_s et V_s sont premiers entre eux, nous voyons grâce au lemme I.5, qu'il existe des polynômes G_s and H_s, de $K[T][X]$, et un polynôme non nul Δ_s de $K[T]$, tels que :

$$(10') \qquad G_s U_s + H_s V_s = \Delta_s$$

$$(11') \qquad \deg \Delta_s \leq (n-1)C_2 p^s$$

$$(12') \qquad \max (\deg_X G_s, \deg_X H_s) < \mu_s$$

$$(13') \qquad \max (\deg_T G_s, \deg_T H_s) \leq (n-2)C_2 p^s.$$

En effet, d'après le lemme I.3, si $\deg_X U_s = m$ et $\deg_X V_s = m'$, nous avons

$$\max (\deg_T U_s, \deg_T V_s) \leq C_2 p^s \qquad m + m' \leq n - 1 \qquad m + m' \geq \mu_s > 0.$$

Observons que $\mu_s = 0$ est impossible, vu que α est irrationel, U_s et V_s sont non nuls et vérifient $U_s(\alpha^{p^s}) - \alpha V_s(\alpha^{p^s}) = 0$.
D'après (10′) nous avons, $G_s((P/Q)^{p^s})A_s + H_s((P/Q)^{p^s})B_s = \Delta_s Q^{\mu_s p^s}$ et donc

$$\deg (G_s((P/Q)^{p^s})A_s + H_s((P/Q)^{p^s})B_s) \geq \mu_s p^s \deg Q.$$

D'autre part, puisque deg $P/Q < 0$, (13′) implique

$$\max\,(\deg\, G_s((P/Q)^{p^s})), \deg\, H_s((P/Q)^{p^s})) \leq (n-2)C_2p^s.$$

Alors nous ne pouvons pas avoir simultanément :

$$\deg\, A_s < (\mu_s \deg\, Q - (n-2)C_2)p^s \text{ et } \deg\, B_s < (\mu_s \deg\, Q - (n-2)C_2)p^s.$$

Mais, d'autre part, (9) entraîne

$$\deg\, (A_s - \alpha B_s) < (C_2 \ + (\mu_s - 1)\deg\, Q)p^s$$

puisque $\deg(P - \alpha Q) < 0$. Supposons que deg $Q \geq (n-1)C_2$. Alors nous avons

$$\deg\, (A_s - \alpha B_s) < (\mu_s \deg\, Q - (n-2)C_2)p^s.$$

Ainsi, si nous avions deg $B_s < (\mu_s \deg\, Q - (n-2)C_2)p^s$ et donc aussi $\deg \alpha B_s < (\mu_s \deg\, Q - (n-2)C_2)p^s$, vu que deg $\alpha < 0$, nous aurions aussi $\deg A_s < (\mu_s \deg\, Q - (n-2)C_2)p^s$, ce qui est impossible. Par conséquent nous avons deg $B_s \geq (\mu_s \deg\, Q - (n-2)C_2)p^s$, i.e. (14), dès que $C_3 \geq (n-1)C_2$.

Maintenant , nous pouvons aussi écrire, d'après (10′),

$$Q^{(\mu_s-1)p^s} G_s((P/Q)^{p^s})A_s \ + Q^{(\mu_s-1)p^s} H_s((P/Q)^{p^s})B_s \ = \Delta_s Q^{(2\mu_s-1)p^s}.$$

Alors, d'après (12)′, $Q^{(\mu_s-1)p^s} G_s((P/Q)^{p^s}) \in K[T]$, et $Q^{(\mu_s-1)p^s} H_s((P/Q)^{p^s}) \in K[T]$, donc le plus grand commun diviseur D_s de A_s et B_s divise $\Delta_s Q^{(2\mu_s-1)p^s}$.

Maintenant nous introduisons les éléments U_s^* and V_s^* de $K[T][X]$ définis par

$$U_s^*(X) = X^{\mu_s} U_s(1/X) \text{ et } V_s^*(X) = X^{\mu_s} V_s(1/X).$$

Les polynômes U_s^* et V_s^* sont premiers entre eux dans $K[T][X]$, puisque U_s et V_s le sont. Alors, d'après le lemme I.5, il existe des polynômes $\Delta_s^0 \in K[T]$, $\Delta_s^0 \neq 0$, G_s^0 and $H_s^0 \in K[T][X]$, tels que :

(10″) $\quad G_s^0 U_s^* \ + H_s^0 V_s^* \ = \Delta_s^0$

(11″) $\quad \deg\, \Delta_s^0 \leq nC_2p^s$

(12″) $\quad \max\,(\deg_X\, G_s^0, \deg_X\, H_s^0) < \mu_s$.

En effet $\deg_X\, U_s^* \leq \mu_s$ et $\deg_X\, V_s^* \leq \mu_s$, donc $\deg_X\, U_s^* + \deg_X\, V_s^* \leq 2\mu_s \leq n$. Vu que $P^{\mu_s p^s} U_s^*((Q/P)^{p^s}) = A_s$ et $P^{\mu_s p^s} V_s^*((Q/P)^{p^s}) = B_s$, nous pouvons en déduire, comme ci-dessus, que D_s divise $\Delta_s^0 P^{(2\mu_s-1)p^s}$. Alors, comme P et Q sont premiers entre eux , D_s divise $\Delta_s \Delta_s^0$ et par conséquent deg $D_s \leq (2n-1)C_2p^s$, d'après (11′) et (11″). Ainsi le lemme est prouvé avec $C_3 = (2n-1)C_2$.

Maintenant nous allons prouver le théorème I.1, et plus précisément :

THÉORÈME I.2. *Soit α un élément algébrique de $K((T^{-1}))$, de degré $n > 1$. Supposons que $\alpha \notin \mathcal{H}$. Soit μ et r des entiers positifs. Supposons que pour tout $s \in r\mathbb{N}^*$, nous avons $\mu_s \leq \mu$, avec les notations déjà introduites.*

Alors pour tout réel positif ϵ, et pour tout couple $(P, Q) \in K[T] \times K[T]$ avec deg Q *suffisamment grand, nous avons*

$$| P - \alpha Q | \geq | Q |^{-(\mu+\epsilon)}$$

Le théorème I.1 découle du théorème I.2 , si on remarque, comme nous l'avons déjà mentionné après le lemme I.3, que nous avons $\mu_s \leq [n/2]$, pour tout entier s.

Nous divisons la preuve en deux parties, chacune faisant l'objet d'un lemme. D'abord, nous remarquons que, α ne satisfaisant aucune équation de la forme

$$\alpha = (A\alpha^{p^s} + B)/(C\alpha^{p^s} + D)$$

il est impossible que les polynômes U_s et V_s soient tous deux de degré inférieur à 2. Donc $\mu_s \geq 2$ pour tout entier s.
Avec les mêmes notations et conditions que dans le théorème I.2 et les lemmes précédents, en fixant $C_3 = (2n-1)C_2 > 0$, nous avons :

LEMME I.7. *Soit $0 < \epsilon < 1/2$. Soient (P, Q) et (P_1, Q_1) deux couples de $K[T] \times (K[T] \backslash \{0\})$, avec P.G.C.D.$(P, Q) =$ P.G.C.D$(P_1, Q_1) = 1$ et* deg $Q \geq 4C_3$. *Supposons qu'il existe un entier $s \in r\mathbb{N}^*$ tel que :*

$$(16) \qquad \frac{\deg Q_1}{(1+\epsilon)\deg Q - C_2} \leq p^s \leq \frac{(\mu+\epsilon)\deg Q_1}{\mu \deg Q + C_2}$$

Alors on ne peut avoir simultanément

$$(17) \quad \deg (P - \alpha Q) < -(\mu+\epsilon)\deg Q \quad \textit{et} \quad (18) \quad \deg (P_1 - \alpha Q_1) < -(\mu+\epsilon)\deg Q_1$$

Preuve . Supposons (17) et (18) vérifiées. Nous considérons A_s and B_s, les éléments de $K[T]$ obtenus à partir de (P, Q), comme indiqué dans le lemme I.4. Puis nous cherchons un entier positif $s \in r\mathbb{N}^*$ tel que :

$$(19) \quad \deg (B_s(P_1 - \alpha Q_1)) < 0 \quad \text{et} \quad (20) \quad \deg (Q_1(A_s - \alpha B_s)) < 0$$

D'après (18) et (8), et avec $\mu_s \leq \mu$, la condition (19) est satisfaite si $(C_2 + \mu \deg Q)p^s \leq (\mu+\epsilon)\deg Q_1$ i.e., si

$$p^s \leq \frac{(\mu+\epsilon)\deg Q_1}{\mu \deg Q + C_2}.$$

D'après (17) et (9), et avec $\mu_s \leq \mu$, nous avons deg $(A_s - \alpha B_s) \leq (C_2 - (1 + \epsilon)\deg Q)p^s$. Donc nous aurons (20), si deg $Q_1 - ((1+\epsilon)\deg Q - C_2)p^s \leq 0$. C'est-à-dire, comme deg $Q \geq C_2$, si

$$p^s \geq \frac{\deg Q_1}{(1+\epsilon)\deg Q - C_2}.$$

Donc s'il existe un entier $s \in r\mathbb{N}^*$ vérifiant (16), alors il vérifie (19) et (20). Par soustraction on obtient deg $(A_sQ_1 - B_sP_1) < 0$, et par conséquent $A_sQ_1 - B_sP_1 = 0$, puisque $A_sQ_1 - B_sP_1$ est un élément de $K[T]$. Mais cette égalité est impossible si deg Q est assez grand : en effet, si $A_sQ_1 - B_sP_1 = 0$, nous avons $A_s/B_s = P_1/Q_1$ et donc deg $Q_1 =$ deg $B_s -$ deg D_s, puisque P_1 et Q_1 sont premiers entre eux. Or nous avons deg $B_s \geq (\mu_s \ - C_3)p^s$ et deg $D_s \leq C_3p^s$, si deg $Q \geq C_3$, d'après le lemme I.6. Par conséquent deg $Q_1 \geq (\mu_s\text{deg } Q - 2C_3)p^s$. Vu que $\mu_s \geq 2$ pour chaque s et deg $Q \geq 4C_3$, nous obtenons deg $Q_1 \geq 2(\text{deg } Q - C_3)p^s \geq (3/2)p^s\text{deg } Q$. Tandis que d'après (16), deg $Q_1 < (1+\epsilon)p^s\text{deg } Q < (3/2)p^s\text{deg } Q$, d'où la contradiction. Ainsi s'il existe s satisfaisant (16), on ne peut avoir simultanément (17) et (18).

Nous établissons enfin le dernier lemme :

LEMME I.8. *Soit $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite, strictement croissante, d'entiers positifs. Soient μ, ϵ et C des réels positifs, et r, un entier positif. Il existe des triplets $(j, j', s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times r\mathbb{N}^*$, avec j arbitrairement grand, satisfaisant*

$$(21) \qquad \frac{d_{j'}}{(1+\epsilon)d_j - C} \leq p^s \leq \frac{(\mu+\epsilon)d_{j'}}{\mu d_j + C}.$$

Preuve . Pour $d_j \geq 2C/\epsilon$, (21) est vérifié si l'on a

$$(22) \qquad \frac{d_{j'}}{(1+\epsilon/2)d_j} \leq p^s \leq \frac{(\mu+\epsilon)d_{j'}}{(\mu+\epsilon/2)d_j}.$$

Si nous posons $s = rt$ et $q = p^r$, la condition (22) s'écrit :

$$(23) \quad \log_q(d_{j'}/d_j) - \log_q(1+\epsilon/2) \leq t \leq \log_q(d_{j'}/d_j) + \log_q((\mu+\epsilon)/(\mu+\epsilon/2)).$$

Il est clair que l'on peut remplacer la suite $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite. Alors, comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact, nous pouvons supposer que la suite $(\log_q d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge modulo 1. Nous pouvons aussi supposer que $d_{j+1} \geq qd_j$. Alors $\log_q d_{j+1} - \log_q d_j = \log_q(d_{j+1}/d_j)$ tend vers zéro dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\log_q(d_{j+1}/d_j) \geq 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Comme $-\log_q(1+\epsilon/2) < 0 < \log_q((\mu+\epsilon)/(\mu+\epsilon/2))$, il existe pour tout couple $(j, j') = (j, j+1)$, avec j suffisamment grand, un entier positif t satisfaisant la double inégalité (23).

La preuve du théorème I.2 résulte de la comparaison des lemmes I.7 et I.8. Si l'on avait une suite infinie $(P(j)/Q(j))_{j\in\mathbb{N}}$, d'approximations rationnelles de α, vérifiant, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\text{deg } (P(j) - \alpha Q(j)) < -(\mu+\epsilon)\text{deg } Q(j)$$

avec la suite $(\text{deg } Q(j))_{j\in\mathbb{N}}$ stictement croissante, alors le lemme I.8, avec $C = C_2$ et $d_j = \text{deg } Q(j)$, contredirait le lemme I.7, avec $Q = Q(j)$ et $Q_1 = Q(j')$.

Dans des cas particulier, le théorème I.2 peut être appliqué avec $\mu < [n/2]$. Par exemple, soit $q = p^r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que α est une racine dans $K((T^{-1}))$ d'un polynôme irréductible sur $K[T]$ de la forme

$$(24) \qquad f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^q + a_3X^{q^2}$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont des polynômes non nuls de $K[T]$. Supposons de plus que α ne satisfait aucune équation de la forme $\alpha = A\alpha^{p^s} + B$, pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in K(T) \times K(T)$ (pour un exemple voir [9]). Alors pour tout entier $t \in \mathbb{N}^*$, il existe des éléments e_t, f_t et g_t de $K(T)$, tels que

$$(25) \qquad \alpha = e_t + f_t \alpha^{q^t} + g_t \alpha^{q^{t+1}}.$$

En effet, α étant racine de f, (24) montre que (25) est vraie pour $t = 1$. Alors, par récurrence sur $t \geq 1$, nous avons

$$\alpha = e_t - f_t((a_0 + a_2\alpha^q + a_3\alpha^{q^2})/a_1)^{q^t} + g_t\alpha^{q^{t+1}} = e_{t+1} + f_{t+1}\alpha^{q^{t+1}} + g_{t+1}\alpha^{q^{t+2}}$$

Alors, si l'on pose $e_t = E_t/D_t$, $f_t = F_t/D_t$, et $g_t = G_t/D_t$, avec $E_t, F_t, G_t, D_t \in K[T]$ et P.G.C.D.$(E_t, F_t, G_t, D_t) = 1$, l'égalité (25) peut s'écrire

$$U(\alpha^{q^t}) - \alpha V(\alpha^{q^t}) = 0$$

où $U(X) = E_t + F_t X + G_t X^q$ et $V(X) = D_t$, sont deux polynômes de $K[T][X]$ premiers entre eux. On a $\deg_X U = q$ et $\deg_X V = 0$. On voit, avec les notations du lemme I.3, que pour $q \leq k \leq q^2 - 1$ et $s = rt$, on a $U_{k,s} = U$ et $V_{k,s} = V$, à cause de l'unicité (modulo K^*) du couple $(U_{k,s}, V_{k,s})$. Ainsi $U_s = U$, $V_s = V$ et $\mu_s = q$. D'autre part $\alpha \notin \mathcal{H}$. En effet si l'on avait $\alpha \in \mathcal{H}_s$, alors on aurait $\alpha \in \mathcal{H}_{rs}$. Donc ceci contredirait l'égalité (25), en vertu de l'unicité (modulo K^*) du couple $(U_{k,rs}, V_{k,rs})$ pour $k = q$ (voir lemme I.3). Alors le théorème I.2 peut s'appliquer avec $\mu = q$ et donc nous avons

$$| P - \alpha Q | \geq | Q |^{-(q+\epsilon)}$$

pour tout rationnel $P/Q \in K(T)$, avec deg Q assez grand.

CAPITRE II
La méthode différentielle

Dans ce chapitre nous introduisons la dérivation naturelle sur $K((T^{-1}))$: la dérivation formelle terme à terme des séries. Si $\alpha \in K((T^{-1}))$, nous notons α' la série dérivée de α. Le sous-corps des constantes pour cette dérivation contient K. Mais si la caractéristique de K est p nous avons $\alpha' = 0$ si et seulement si $\alpha = \beta(T^p)$. Donc le sous-corps des constantes est $K((T^{-p}))$. Nous notons $\alpha^{(k)}$ la k-ième fonction dérivée de α. Si p est la caractéristique de K, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ nous avons $(T^k)^{(p)} = k(k-1)...(k-p+1)T^{k-p} = 0$ car p divise $k(k-1)...(k-p+1)$, et par conséquent, pour tout $\alpha \in K((T^{-1}))$, nous avons $\alpha^{(p)} = 0$ et aussi $\alpha^{(p-1)} \in K((T^{-p}))$.

Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ algébrique sur $K(T)$ de degré $n > 1$. Il existe $F \in K[T, X]$, polynôme minimal de α, avec $\deg_X F = n$, tel que

$$(1) \qquad F(T, \alpha) = 0.$$

Si nous dérivons cette égalité nous obtenons

$$F'_T(T, \alpha) + \alpha' F'_X(T, \alpha) = 0.$$

Comme α est séparable, nous avons $F'_X(T, \alpha) \neq 0$. Cette égalité montre donc que $\alpha' \in K(T, \alpha)$. Ainsi il existe $G \in K(T)[X]$, avec $\deg_X G < n$, tel que

$$(2) \qquad \alpha' = G(\alpha).$$

Si l'on a $\deg_X G \leq 2$, nous dirons que α satisfait une équation différentielle de Riccati à coefficients rationnel. Nous avons

$$\alpha' = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

avec a, b et $c \in K(T)$. Si $a = 0$ l'équation différentielle obtenue est linéaire, ce que nous considérons comme un cas particulier d'équation différentielle de Riccati.

§1. Le Théorème d'OSGOOD.

A la suite des travaux de E. Kolchin [5], C. Osgood a étudié l'approximation rationnelle des séries formelles à l'aide de la dérivation. En 1973 et 1974 il publie deux articles ([12], [13]) traitant d' approximation diophantienne dans $K((T^{-1}))$, où K est un corps arbitraire. Nous donnons ici, de nouveau, la démonstration de deux résultats issus de ces articles. Précisons que, dans les deux théorèmes qui suivent, nous ne faisons, exceptionnellement, aucune hypothèse sur la caractéristique du corps K.

THÉORÈME II.1. *Soit K un corps et $\alpha \in K((T^{-1}))$, algébrique, de degré n, sur $K(T)$. Si α ne satisfait pas une équation différentielle de Riccati à coefficients rationnels, alors il existe une constante réelle positive C, dépendant de α, telle que*

$$|Q\alpha - P| \geq C|Q|^{-n+2}$$

pour tout couple $(P, Q) \in K[T] \times K[T]$, avec $Q \neq 0$.

Remarque. Ici on a $n \geq 4$ car sinon α satisfait une équation différentielle de Riccati. Nous pouvons remarquer que la conclusion du théorème est équivalente à $B(\alpha, n-2) > 0$.

Preuve . Soient $P, Q \in K[T]$, avec $Q \neq 0$. Si $|P/Q| > |\alpha|$, alors nous avons

$$(1) \quad |\alpha - P/Q| = |P/Q| > |\alpha| \geq |\alpha|\ |Q|^{-n+1}.$$

Supposons maintenant que $|P/Q| \leq |\alpha|$.
Soit $F \in K(T)[X]$ le polynôme unitaire minimal de α. Nous avons

$$F(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \quad \text{et} \quad F(\alpha) = 0$$

avec $a_i \in K(T)$, pour $0 \leq i \leq n-1$. Par hypothèse, il existe un polynôme $G \in K(T)[X]$ tel que

$$G(X) = b_m X^m + b_{m-1}X^{m-1} + ... + b_0 \quad \text{et} \quad \alpha' = G(\alpha)$$

avec $2 < m < n$, $b_i \in K(T)$, pour $0 \leq i \leq m$, et $b_m \neq 0$.
Nous introduisons les deux polynômes différentiels :

$$(2) \quad H_1(X) = X' - G(X) \ \text{ et } \ (3) \quad H_2(X) = F(X) + b_m^{-1}X^{n-m}H_1(X).$$

On a, d'après (2), $H_1(P/Q) = (QP' - PQ')/Q^2 - G(P/Q)$. Comme $\deg_X G \leq n-1$, on voit qu'il existe un polynôme non nul, $A \in K[T]$, tel que $AQ^{n-1}H_1(P/Q) \in K[T]$. Nous remarquons que (3) peut s'écrire

$$(4)\ H_2(X) = F(X) - X^n + b_m^{-1}(X^{n-m}X' - b_0X^{n-m} - b_1X^{n-m+1} - .... - b_{m-1}X^{n-1}).$$

Comme $n - m + 2 \leq n - 1$, on voit, de même, qu'il existe un polynôme non nul, $B \in K[T]$, tel que $BQ^{n-1}H_2(P/Q) \in K[T]$. D'autre part si $H_1(P/Q) = 0$ et $H_2(P/Q) = 0$, alors, d'après (3), on a $F(P/Q) = 0$, ce qui est impossible. Nous avons donc

$$(5) \quad |AQ^{n-1}H_1(P/Q)| \geq 1 \quad \text{ou bien} \quad |BQ^{n-1}H_2(P/Q)| \geq 1$$

Comme $F(\alpha) = 0$ et $H_1(\alpha) = 0$, on a aussi, d'après (3), $H_2(\alpha) = 0$. Alors nous avons

$$(6) \quad |H_1(\alpha) - H(P/Q)| = |H_1(P/Q)| \quad \text{et} \quad |H_2(\alpha) - K(P/Q)| = |H_2(P/Q)|.$$

Maintenant nous voulons montrer qu'il existe deux constantes réelles positives C_1 et C_2, dépendant de α, telles que

$$(7) \quad |H_1(\alpha) - H_1(P/Q)| \leq C_1|\alpha - P/Q| \quad \text{et} \quad |H_2(\alpha) - H_2(P/Q)| \leq C_2|\alpha - P/Q|.$$

En effet, si l'on pose $C_0 = \max(1, |\alpha|)$, alors, comme $|P/Q| \leq |\alpha|$, il est facile de voir que

$$|(\alpha - (P/Q))'| \leq |\alpha - P/Q| \qquad |\alpha^i - (P/Q)^i| \leq C_0^{n-2}|\alpha - P/Q|$$

pour tout entier i, avec $1 \leq i \leq n-1$ et aussi

$$|\alpha'\alpha^{n-m} - (P/Q)'(P/Q)^{n-m}| \leq C_0^{n-m}|\alpha - P/Q|.$$

Alors en écrivant

$$H_1(\alpha) - H_1(P/Q) = (\alpha - (P/Q))' - \sum_{1\leq i\leq m} b_i(\alpha^i - (P/Q)^i)$$

et

$$H_2(\alpha) - H_2(P/Q) = \sum_{1\leq i\leq n-1} a_i(\alpha^i - (P/Q)^i)$$

$$+ \sum_{1\leq i\leq m-1} b_m^{-1}b_i(\alpha^{n-m+i} - (P/Q)^{n-m+i}) + b_m^{-1}(\alpha'\alpha^{n-m} - (P/Q)'(P/Q)^{n-m})$$

et en utilisant les inégalités ci-dessus, nous voyons que (7) est vérifié.

Maintenant, en comparant (5), (6) et (7), nous obtenons

$$|\alpha - P/Q| \geq C_1^{-1}|A|^{-1}|Q|^{-n+1} \quad \text{ou bien} \quad |\alpha - P/Q| \geq C_2^{-1}|B|^{-1}|Q|^{-n+1}$$

donc

$$(8) \quad |\alpha - P/Q| \geq C_3|Q|^{-n+1}$$

avec $C_3 = \inf\ (C_1^{-1}|A|^{-1}, C_2^{-1}|B|^{-1})$. Si l'on pose $C = \inf\ (|\alpha|, C_3)$, on obtient, par (1) et (8),

$$|\alpha - P/Q| \geq C|Q|^{-n+1}$$

pour tout couple $(P, Q) \in K[T] \times K[T]$, avec $Q \neq 0$. Le théorème est ainsi prouvé.

Le deuxième et principal théorème est une version plus forte du précédent. Il convient de remarquer, de manière plutôt anecdotique, que dans l'article cité plus haut ([13]), Osgood donne le résultat ci-dessous avec un exposant $[(n+3)/2]$ au lieu de $[n/2]+1$. Ce dernier exposant est meilleur et s'obtient sans modification de la preuve. Ainsi nous avons :

THÉORÈME II.2. *Soit K un corps et $\alpha \in K((T^{-1}))$, algébrique, de degré n, sur $K(T)$. Si α ne satisfait pas une équation différentielle de Riccati à coefficients rationnels, alors il existe une constante réelle positive C, dépendant de α, telle que*

$$|Q\alpha - P| \geq C|Q|^{-[n/2]}$$

pour tout couple $(P, Q) \in K[T] \times K[T]$, avec $Q \neq 0$.

Remarque. Comme déjà mentionné, nous avons $n \geq 4$. D'autre part la conclusion de ce théorème est équivalente à $B(\alpha, [n/2]) > 0$.

Preuve . Comme ci-dessus, si on a un couple (P,Q), avec $Q \neq 0$ et $|P/Q| > |\alpha|$, alors nous avons

$$(1) \quad |\alpha - P/Q| \geq |\alpha|\ |Q|^{-[n/2]-1}$$

Soit donc un couple $(P,Q) \in K[T] \times K[T]$ avec $Q \neq 0$ et $|P/Q| \leq |\alpha|$.
Nous posons $d = [(n-2)/2]$, et nous considérons les $n+1$ éléments de $K(T,\alpha)$: $1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-d-1}, \alpha', \alpha'\alpha, ..., \alpha'\alpha^d$. Ces éléments sont liés sur $K(T)$. Par conséquent il existe deux polynômes R et S dans $K[T][X]$, que nous pouvons supposer premiers entre eux, tels que

$$(2) \quad \alpha' R(\alpha) = S(\alpha) \qquad \text{avec } (3) \quad \deg_X\ R \leq d \quad \deg_X\ S \leq n-d-1.$$

Nous introduisons le polynôme différentiel

$$(4) \quad H(X) = X'R(X) - S(X)$$

Nous remarquons que $\max(d+2, n-d-1) = [n/2]+1$. Par conséquent (3) entraîne que $Q^{[n/2]+1}H(P/Q)$ est un élément de $K[T]$.
Supposons que $H(P/Q) \neq 0$. Alors nous avons (5) $|Q|^{[n/2]+1}|H(P/Q)| \geq 1$. Les mêmes arguments que dans le théorème précédent, montrent qu'il existe une constante réelle positive C_1, dépendant de α, telle que

$$(6) \quad |H(\alpha) - H(P/Q)| \leq C_1 |\alpha - P/Q|.$$

Comme $H(\alpha) = 0$, par (5) et (6), nous avons

$$|\alpha - P/Q| \geq C_1^{-1}|H(\alpha) - H(P/Q)| = C_1^{-1}|H(P/Q)| \geq C_1^{-1}|Q|^{-[n/2]-1}$$

Il reste à considérer les rationnels P/Q tels que $H(P/Q) = 0$. Tout d'abord, observons que l'on peut évidemment se restreindre aux couples $(P,Q) \in K[T] \times K[T]$ avec $P.G.C.D.(P,Q) = 1$. La fin de la démonstration résultera du lemme II.2 qui va suivre. En effet ce lemme établit qu'il existe une constante réelle positive C_0 telle que si $(P,Q) \in K[T] \times K[T]$ avec $P.G.C.D.(P,Q) = 1$ et $H(P/Q) = 0$, alors $|Q| \leq C_0$. Ainsi, si l'on pose

$$C_2 = \inf_{|Q| \leq C_0} \{|\alpha - P/Q|\ |Q|^{[n/2]+1}\} \quad \text{et} \quad C = \inf(|\alpha|, C_1^{-1}, C_2)$$

nous avons l'inégalité attendue pour tout couple $(P,Q) \in K[T] \times K[T]$ avec $Q \neq 0$. Le théorème II.2 sera ainsi démontré.

La démonstration du lemme II.2 se décompose en deux étapes. Nous prouvons d'abord le lemme suivant :

LEMME II.1. *Soient R et S, deux polynômes en X, premiers entre eux, à coefficients dans $K[T]$. Considérons l'équation différentielle*

$$(1) \qquad X'R(X) = S(X).$$

Supposons que $\deg_X R > 0$. *Alors il existe une constante réelle positive* C, *dépendant de* R *et de* S, *telle que si* $(P,Q) \in K[T]\times K[T]$, *avec* $P.G.C.D.(P,Q)=1$, *et* P/Q *est une solution de* (1), *nous avons* $\max(|P|,|Q|) \leq C$.

PREUVE . La première étape consiste à montrer qu'il existe une constante réelle positive C_1 telle que $|R(P/Q)| \geq C_1$, pour toute solution P/Q de (1).
Soit P/Q solution de (1). Supposons que $|R(P/Q)| \leq 1$. Nous pouvons écrire

$$R(X) = r_0X^\rho + r_1X^{\rho-1} + ... + r_\rho = r_0(X-\theta_1)(X-\theta_2)....(X-\theta_\rho)$$

où $r_0 \neq 0$ et $\rho > 0$. Nous étendons la valeur absolue au corps $K(T,\theta_1,...,\theta_\rho)$ de décomposition du polynôme R. Alors $|r_0| \geq 1$ et $|R(P/Q)| \leq 1$ entraînent l'existence d'un indice i tel que $|P/Q-\theta_i| \leq 1$. Posons $||R|| = |T|^{\deg_T R}$ et $C_0 = \max(||R||,||S||)$. Comme $R(\theta_i)=0$, nous avons $|\theta_i| \leq C_0$: en effet, si $|\theta| > ||R||$ alors $|R(\theta)| = |r_0\theta^\rho| \neq 0$. Donc si $|P/Q| > C_0$, alors $|P/Q-\theta_i| = |P/Q| > 1$. Par conséquent nous avons

$$(2) \quad |P/Q| \leq C_0$$

et aussi $|(P/Q)'| \leq C_0$. Comme P/Q est solution de (1), nous obtenons

$$(3) \quad |S(P/Q)| \leq C_0|R(P/Q)|.$$

Distinguons deux cas. Si $\sigma = \deg_X S = 0$ alors $S(X) = s_0 \neq 0$ et (3) entraîne $|R(P/Q)| \geq |s_0|/C_0$.
Si $\sigma = \deg_X S > 0$ alors il existe deux polynomes R_1 et S_1 de $K[T][X]$, tels que

$$(4) \quad RR_1 + SS_1 = \Delta$$

où $\Delta \in K[T]$ est le résultant des deux polynômes R et S, premiers entre eux. D'aprés le lemme I.5, nous avons

$$\deg_X R_1 \leq \sigma - 1, \quad \deg_X S_1 \leq \rho - 1 \quad \text{et} \quad \max(||R_1||,\ ||S_1||) \leq C_0^{\sigma+\rho-1}$$

Alors par (2), nous avons $|R_1(P/Q)| \leq ||R_1||C_0^{\sigma-1}$ et une majoration du même type pour $|S_1(P/Q)|$. Donc par (3) et (4), nous voyons qu'il existe une constante réelle positive C_0' telle que $|\Delta| \leq C_0'|R(P/Q)|$.
En conclusion, il existe un réel positif C_1 tel que, pour tout P/Q solution de (1), on a

$$(5) \quad |R(P/Q)| \geq C_1.$$

Maintenant nous introduisons sur $K(T)$ une nouvelle valeur absolue. Soit $z \in K$ et $\alpha \in K(T)$, nous étendons à $K(T)$ la valeur absolue $T-z$-adique, définie sur $K[T]$ par

$$|P(T-z)^\nu|_z = |T|^{-\nu} \quad \text{si} \quad P(z) \neq 0.$$

Nous allons montrer qu'il existe un polynôme non nul, $\delta \in K[T]$, tel que $|R(P/Q)|_z \geq |\delta|_z$, pour toute solution P/Q de (1).
Soit P/Q solution de (1). Supposons que $|R(P/Q)|_z \leq 1$. Comme ci-dessus, nous étendons la valeur absolue au corps $K(T,\theta_1,...,\theta_\rho)$. Comme $|r_0|_z \leq 1$, nous avons $\prod_{1\leq i\leq\rho} |r_0(P/Q-\theta_i)|_z = |r_0^{\rho-1}R(P/Q)|_z \leq 1$. Ceci entraîne l'existence d'un indice

i tel que $|r_0(P/Q-\theta_i)|_z \le 1$. d'autre part $r_0\theta_i$ étant un entier algébrique, nous avons $|r_0\theta_i|_z \le 1$, et par conséquent

$$(6) \quad |r_0(P/Q)|_z \le 1.$$

Maintenant remarquons que $|\alpha|_z \le 1$ entraîne $|\alpha'|_z \le 1$, et donc $|r_0'(P/Q) + r_0(P/Q)'|_z \le 1$. On en déduit, en multipliant par $|r_0|_z$, $|r_0^2(P/Q)'|_z \le 1$. L'équation différentielle (1) implique alors

$$(7) \quad |r_0^2 S(P/Q)|_z \le |R(P/Q)|_z.$$

Comme précédemment, distinguons deux cas. Si $\sigma = \deg_X S = 0$ alors $S(X) = s_0 \ne 0$ et (7) entraîne $|s_0 r_0^2|_z \le |R(P/Q)|_z$.
Si $\sigma = \deg_X S > 0$, alors les majorations sur les degrés en X de R_1 et S_1 et l'inégalité (6), conduisent à

$$|r_0^{\sigma-1}R_1(P/Q)|_z \le 1 \quad \text{et} \quad |r_0^{\rho-1}S_1(P/Q)|_z \le 1$$

D'où nous obtenons, par (4) et (7), $|\Delta r_0^{\sigma+\rho+1}|_z \le |R(P/Q)|_z$. Donc il existe, dans tous les cas, un polynôme non nul, $\delta \in K[T]$, tel que $|R(P/Q)|_z \ge |\delta|_z$, pour toute solution P/Q de (1).

Nous écrivons

$$(8) \quad R(P/Q) = (r_0P^\rho + r_1P^{\rho-1}Q + ... + r_\rho Q^\rho)/Q^\rho = U/V$$

avec $U, V \in K[T]$ et $P.G.C.D.(U,V) = 1$. Alors si $|U|_z < 1$, nous avons $|V|_z = 1$ et $|U|_z = |R(P/Q)|_z \ge |\delta|_z$. Si $|U|_z = 1$ alors il est clair que $|U|_z \ge |\delta|_z$. Maintenant, nous pouvons supposer le corps K algébriquement clos. Alors $|U|_z \ge |\delta|_z$, pour tout $z \in K$, entraîne que U divise δ dans $K[T]$ et donc

$$(9) \quad |U| \le |\delta|.$$

Par (5), (8) et (9), il vient $|V| \le |\delta|/C_1$. De plus si

$$D = P.G.C.D.(r_0P^\rho + ... + r_\rho Q^\rho, Q^\rho) \quad \text{et} \quad D_1 = P.G.C.D.(r_0P^\rho + ... + r_\rho Q^\rho, Q)$$

alors D divise D_1^ρ, et $D_1 = P.G.C.D.(r_0, Q)$ car $P.G.C.D.(P,Q) = 1$, donc D divise r_0^ρ.
Nous avons donc $|Q^\rho| = |VD| \le |r_0^\rho|\ |\delta|/C_1$, et il existe une constante réelle, $C' > 0$ telle que

$$(10) \quad |Q| \le C'.$$

Enfin $UD = r_0P^\rho + ... + r_\rho Q^\rho$ entraîne $|r_0P^\rho| \le \max_{1\le i\le\rho}(|UD|, |r_iP^{\rho-i}Q^i|)$. Soit $|r_0P^\rho| \le |UD|$, et alors $|P| \le |\delta|^{1/\rho}\ |r_0^{(\rho-1)/\rho}|$. Ou bien, il existe un indice $i \ge 1$, tel que $|r_0P^\rho| \le |r_iP^{\rho-i}Q^i|$, et alors $|P| \le |r_i/r_0|^{1/i}\ |Q|$. Donc en tout cas, il existe une constante réelle, $C'' > 0$, telle que

$$(11) \quad |P| \le C''.$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

Nous pouvons maintenant démontrer :

LEMME II.2. *Soient R et S, deux polynômes en X, premiers entre eux, à coefficients dans $K[T]$. Considérons l'équation différentielle*

$$(1) \qquad X'R(X) = S(X).$$

Supposons que nous n'avons pas simultanément $\deg_X\ R = 0$ et $\deg_X\ S \leq 2$, i.e., l'équation différentielle (1) n'est pas de Riccati. Alors il existe une constante réelle positive C, dépendant de R et de S, telle que si $(P, Q) \in K[T] \times K[T]$, avec $P.G.C.D.(P, Q) = 1$, et P/Q est une solution de (1), nous avons $|Q| \leq C$.

Preuve . Posons $\deg_X\ R = \rho$ et $\deg_X\ S = \sigma$. Si $\rho > 0$, alors le lemme II.1 entraîne le résultat voulu. Si $\rho = 0$, alors, par hypothèse, nous avons $\sigma \geq 3$. Soit P/Q une solution de (1). Alors Q/P est une solution de l'équation différentielle

$$(2) \qquad (1/X)'R(1/X) = S(1/X).$$

Donc Q/P est une solution de l'équation différentielle

$$(3) \qquad X'R_1(X) = S_1(X)$$

avec $R_1(X) = -r_0X^{\sigma-2}$ et $S_1(X) = s_0 + s_1X + ... + s_\sigma X^\sigma$, si on a $R(X) = r_0$ et $S(X) = s_0X^\sigma + s_1X^{\sigma-1} + ... + s_\sigma$.
Comme R_1 et S_1 sont premiers entre eux, avec $\deg_X\ R_1 > 0$. Nous pouvons donc invoquer le lemme II.1, pour la solution Q/P de l'équation différentielle (3), et le résultat s'en suit. Ceci achève la démonstration du lemme II.2 et donc aussi du théorème II.2.

Les deux théorèmes précédents sont à rapprocher du théorème I.1. Bien que les hypothèses soient différentes, la conclusion des deux théorèmes I.1 et II.2 entraîne que $\nu(\alpha) \leq [n/2]$. Comme nous l'avons signalé lors de la démonstration du théorème I.1, nous aurions pu obtenir une version plus faible de ce théorème dont la conclusion aurait été semblable à celle du théorème II.1. L'avantage du théorème II.2, sur le théorème I.1, est son effectivité (i.e., $\nu(\alpha) \leq [n/2]$ et en outre $B(\alpha, [n/2]) > 0$). Cet aspect a été souligné par W. Schmidt [15], dans un article précisant et éclairant les résultats d'Osgood, dans le cas où la caractéristique de K est nulle. Cet article nous a inspiré, pour la présentation de ces résultats et en particulier celle des lemmes II.1 et II.2. L'objet du paragraphe suivant est de faire la lumière sur le lien entre les théorèmes I.1 et II.2.

§2. Sur le lien entre l'équation différentielle de Riccati et les éléments de type Homographie-Frobenius.

Nous commençons par faire une remarque générale sur l'approximation rationnelle d' une solution d'équation différentielle de Riccati.

Si $\alpha \in K((T^{-1}))$, irrationnel, satisfait une équation différentielle de Riccati (R), alors nous pouvons séparer les éléments $P/Q \in K(T)$ en deux groupes : ceux qui satisfont l'équation (R), et ceux qui ne la satisfont pas. Si P/Q n'est pas solution de (R), alors le raisonnement déjà utilisé dans la démonstration des théorèmes II.1 et II.2 (en fait le principe de Liouville), montre qu'il existe une constante réelle positive C, dépendant de α telle que

$$|\alpha - P/Q| \geq C|Q|^{-2}.$$

Maintenant considérons exceptionnellement le cas où la caractéristique de K est 0. Si P/Q est solution de (R), et si $\mathrm{car}(K) = 0$, alors, (voir Osgood [12] ou Schmidt [15]), il existe une constante réelle positive C', dépendant de α telle que

$$|\alpha - P/Q| \geq C'.$$

Alors $|\alpha - P/Q| \geq \inf\ (C, C')|Q|^{-2}$ pour tout $P/Q \in K(T)$. C'est-à-dire que $\nu(\alpha) = 1$ et $B(\alpha, 1) > 0$.

Si $\mathrm{car}(K) > 0$, la situation est bien différente. En effet, il est facile de voir qu'un élément de $\mathcal{H}$ satisfait une équation différentielle de Riccati (lemme II.3 ci-dessous). D'autre part nous savons qu'il peut se faire qu'un tel élément soit très bien approchable par des rationnels (exemple de Mahler, [7]), ou bien, à l'opposé, soit très mal approchable par des rationnels (exemple de Baum et Sweet, [1]).

Nous allons voir, dans ce paragraphe, que le théorème II.2 permet de démontrer le théorème I.1, avec une hypothèse restrictive. Pour commençer, nous donnons ce résultat, dans un cas très particulier, en utilisant une méthode élémentaire. Cet exemple a pour but d'illustrer les idées qui permettront de passer à un cas plus général. Nous prouvons le résultat suivant :

THÉORÈME II.3. *Soit $K = \mathbb{F}_2$ et $\alpha \in K((T^{-1}))$, algébrique sur $K(T)$, de degré 4. Si $\alpha \notin \mathcal{H}$ alors $B(\alpha, 2) > 0$.*

Preuve . Nous allons nous servir du fait que l'homomorphisme de Frobenius, ainsi que l'homographie, conservent la qualité de l'approximation rationnelle. Plus précisemment si $\alpha, \beta \in K((T^{-1}))$, avec $\alpha = f(\beta^q)$, où f est une homographie à coefficients rationnels, s un entier positif ou nul, $q = p^s$ et $p = \mathrm{car}(K)$, alors $\nu(\alpha) = \nu(\beta)$. En effet, soit f l'homographie définie par $f(X) = (AX+B)/(CX+D)$, avec A, B, C et $D \in K[T]$, $\Delta = AD - BC \neq 0$. Si $\alpha = f(\beta^q)$ et $U = AP^q + BQ^q$, $V = CP^q + DQ^q$, nous avons $U/V = f((P/Q)^q)$ et il est facile de vérifier que $V\alpha - U = (\Delta/(C\beta^q + D))(Q\beta - P)^q$. D'autre part $|V| = |Q|^q\ |C(P/Q)^q + D|$. Observons que si $|Q\beta - P|$ est assez petit, alors $|C\beta^q + D| = |C(P/Q)^q + D|$. Alors si μ est un réel positif, et si $|Q\beta - P|$ est assez petit, nous avons

$$|V|^\mu\ |V\alpha - U| = |\Delta|\ |C\beta^q + D|^{\mu-1}\ (|Q|^\mu\ |Q\beta - P|)^q.$$

Ceci montre que $B(\beta, \mu)$ est nul si et seulement si $B(\alpha, \mu)$ est nul, (par conséquent $\nu(\alpha) = \nu(\beta)$).

Nous allons voir que l'on peut constuire une suite finie d'éléments de $K((T^{-1}))$, $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, telle que :
1) pour $1 \leq i \leq k-1$, il existe un entier positif ou nul s_i, et une homographie à coefficients rationnels f_i telle que $\alpha_{i+1} = f_i(\alpha_i^{2^{s_i}})$.
2) α_i satisfait une équation différentielle de Riccati, pour $1 \leq i \leq k-1$, et α_k ne satisfait pas une équation différentielle de Riccati.
Alors nous avons $B(\alpha_i, 2) \neq 0$, pour $1 \leq i \leq k$, d'après le théorème II.2 et l'argument ci-dessus, ce qui prouve le résultat voulu.

Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ solution de l'équation irréductible

$$(1) \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

où $a, b, c, d \in K(T)$. Si α ne satisfait pas une équation différentielle de Riccati, alors $k = 1$ et c'est terminé. Sinon, si α satisfait une équation différentielle de Riccati, il est facile de voir, en dérivant l'équation (1), que l'on doit avoir soit $a = 0$, soit $a \neq 0$ et $(c/a)' = 0$.
Si $a = 0$, alors $c \neq 0$ sinon α^2 serait algébrique de degré 2 sur $K(T)$, mais α et α^2 ont même degré 4, car $K = \mathbb{F}_2$. L'équation (1) entraîne $\alpha = d/c + (b/c)\alpha^2 + (1/c)\alpha^4$.
Si $a \neq 0$ et $(c/a)' = 0$, alors $c/a = A^2$ où $A \in K(T)$. Dans ce cas, l'équation (1) entraîne $(\alpha + A)^{-1} = 1/a + (b/a + A)(\alpha + A)^{-2} + ((bA^2 + A^4 + d)/a)(\alpha + A)^{-4}$.
Nous posons $\beta = (b/c)\alpha$, si $a = 0$, et $\beta = (b/a + A)(\alpha + A)^{-1}$, si $a \neq 0$ et $(c/a)' = 0$. Alors nous voyons que β est solution d'une équation irréductible

$$(2) \qquad x = e + x^2 + fx^4$$

où $e, f \in K(T)$. Remarquons que $f \neq 0$, car β a le même degré que α sur $K(T)$. De plus $f \neq 1$, car sinon $\beta = e + \beta^2 + \beta^4$ entraîne, par élévation au carré, $\beta = e + e^2 + \beta^8$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\alpha \notin \mathcal{H}$. Comme $f \neq 0, 1$, il existe un entier positif ou nul l et $f_l \in K(T)$, tels que $f = f_l^{2^l}$, où f_l n'est pas un carré dans $K(T)$, i.e. $f_l' \neq 0$. Si $l > 0$, posons $f = f_1^2$, et $\beta_1 = \beta + f_1\beta^2$. Alors β étant solution de (2), nous obtenons $\beta = e + \beta_1^2$ et $\beta_1 = e_1 + \beta_1^2 + f_1\beta_1^4$, où $e_1 = e + e^2F_1 \in K(T)$. Nous pouvons répéter ce raisonnement en posant $f_1 = f_2^2$ et $\beta_2 = \beta_1 + f_1\beta_1^2$, et ainsi de suite $f_2 = f_3^2$..., jusqu'à $f_{l-1} = f_l^2$. Nous avons une suite $(\beta_k)_{0 \leq k \leq l}$ d'éléments de $K((T^{-1}))$ et deux suites $(e_k)_{0 \leq k \leq l}$ et $(f_k)_{0 \leq k \leq l}$ d'éléments de $K(T)$, telles que $\beta_k = e_k + \beta_{k+1}^2$ et $\beta_k = e_k + \beta_k^2 + F_k\beta_k^4$. Nous posons $\gamma = \beta_l$, $E = e_l$ et $F = f_l$, alors nous avons $\beta = \sum_{1 \leq k \leq l} e_k^{2^k} + \gamma^{2^l}$. D'autre part γ est solution de l'équation

$$(3) \qquad x = E + x^2 + Fx^4$$

où $E, F \in K(T)$ et $F' \neq 0$. Nous voyons que γ est solution de l' équation différentielle

$$(4) \qquad (Fx)' = (EF)' + F'x^2.$$

Alors deux cas se présentent : l' équation différentielle (4) a ou n'a pas de solution dans $K(T)$. Si (4) n'a pas de solution dans $K(T)$, alors il existe une constante réelle positive C telle que $|\gamma - P/Q| \geq C|Q|^{-2}$ (voir raisonnement ci-dessus et lemme II.5 ci-dessous), donc $\nu(\gamma) = 1$ et $\nu(\alpha)$ aussi. Si (4) a une solution dans $K(T)$, notons la γ_0. Nous remarquons que (4) est équivalente à

$$(5) \qquad ((x + E + x^2)/F)' = 0.$$

Alors, comme $\gamma_0 \in K(T)$, et est solution de (5), il existe $\gamma_1 \in K(T)$ tel que

$$(6) \quad \gamma_0 + \gamma_0^2 + E = F\gamma_1^2.$$

D'autre part, comme γ et γ_0 sont solutions de (5), nous avons, par addition, $(((\gamma + \gamma_0) + (\gamma + \gamma_0)^2)/F)' = 0$, ou encore $((1/(\gamma + \gamma_0) + 1)/F)' = 0$. Par conséquent, il existe $\delta \in K((T^{-1}))$ tel que $1/(\gamma + \gamma_0) + 1 = F\delta^2$, ou encore $\gamma = \gamma_0 + 1/(1 + F\delta^2)$. En portant dans (3), nous avons

$$\gamma_0 + 1/(1 + F\delta^2) = E + \gamma_0^2 + 1/(1 + F\delta^2)^2 + F\gamma_0^4 + F/(1 + F\delta^2)^4.$$

Il vient alors, par (6),

$$(F\gamma_1^2 + F\gamma_0^4)(1 + F\delta^2)^4 + (1 + F\delta^2)^3 + (1 + F\delta^2)^2 + F = 0$$

et enfin δ est solution de l'équation

$$(7) \qquad F^2(\gamma_1 + \gamma_0^2)x^4 + Fx^3 + x + 1 + \gamma_1 + \gamma_0^2 = 0.$$

Alors δ ne satisfait pas une équation différentielle de Riccati. En effet, avec les notations du début, nous avons une équation algébrique (7), de degré 4, avec $a \neq 0$ et $c/a = 1/F$, donc $(c/a)' = F'/F^2 \neq 0$. Ainsi le théorème est démontré.

La démonstration de ce théorème, dans un cas particulier ($K = \mathbb{F}_2$ et $n = 4$), montre que si α est un élément algébrique de $K((T^{-1}))$, avec $\alpha \notin \mathcal{H}$ mais satisfaisant une équation différentielle de Riccati, alors il ne la satisfait que "provisoirement". Autrement dit, on peut penser qu'un élément de $K((T^{-1}))$, algébrique sur $K(T)$, satisfaisant une équation différentielle de Riccati, "de façon définitive", doit être un élément de $\mathcal{H}$. C'est ce que nous verrons avec le théorème II.4. Auparavant, nous donnons un résultat général sur l'équation différentielle de Riccati.

LEMME II.3. *Soit K un corps de caractéristique p. Si $\alpha, \beta \in K((T^{-1}))$, et s'il existe une homographie à coefficients rationnels f, telle que $\alpha = f(\beta^p)$, alors α est solution d'une équation différentielle de Riccati, à coefficients rationnels, ayant une solution dans $K(T)$.*
Supposons le corps K parfait. Soit (R) une équation différentielle de Riccati, à coefficients rationnels, ayant une solution u dans $K(T)$. Alors il existe une homographie à coefficients rationnels, f, telle que pour toute solution, $\alpha \in K((T^{-1}))$, $\alpha \neq u$, de (R), il existe $\beta \in K((T^{-1}))$ tel que $\alpha = f(\beta^p)$.

Remarque. Ainsi si $\alpha \in \mathcal{H}$, alors α satisfait une équation différentielle de Riccati. La réciproque est inexacte : en effet si $\beta \notin \mathcal{H}$ et $\alpha = \beta^p$ alors $\alpha \notin \mathcal{H}$ (en effet $\alpha \in \mathcal{H}$ entraîne $\beta \in \mathcal{H}$, si K est parfait) et α satisfait une équation différentielle de Riccati.

Preuve . Observons que si $\gamma \in K((T^{-1}))$ vérfie une équation différentielle de Riccati, à coefficients rationnels, alors il en est de même de $A\gamma$, $\gamma + B$ et $1/\gamma$, pour $A, B \in K[T]$. Donc s'il existe une homographie à coefficients rationnels f, telle que

$\alpha = f(\beta^p)$, comme β^p est solution de l'équation différentielle de Riccati $y' = 0$, il en est de même pour α. D'autre part si γ est un rationnel tel que $f(\gamma^p)$ existe, alors ce dernier est une solution rationnelle de cette équation.

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme. Auparavant, faisons la remarque suivante :
si $\alpha \in K((T^{-1}))$, on peut écrire, en regroupant les termes de la série suivant le reste l modulo p de leurs degrés,

$$\alpha = \sum_{0 \le l \le p-1} \alpha_l(T^p)T^l \qquad \text{avec} \qquad \alpha_l \in K((T^{-1})) \quad \text{pour} \quad 0 \le l \le p-1.$$

Si l'on note $\alpha^{(i)}$ la i^{ieme} fonction dérivée de α, il est clair que l'on a

$$\alpha^{(i)} = \sum_{i \le l \le p-1} \alpha_l(T^p)(l!/(l-i)!)T^{l-i} \qquad \text{pour} \qquad 0 \le i \le p-1.$$

Supposons que $\alpha \in K((T^{-1}))$ et $\alpha' = r \in K(T)$ alors $\alpha^{(i)} \in K(T)$ pour $1 \le i \le p-1$. En inversant le système ci-dessus, on obtient $\alpha_i(T^p) \in K(T)$ pour $1 \le i \le p-1$. Par conséquent $\alpha = \alpha_0(T^p) + R$ où $R \in K(T)$. Ainsi $\alpha' = R'$, et tout élément rationnel, ayant une primitive dans $K((T^{-1}))$, a une primitive rationnelle. Si le corps K est parfait $K((T^{-p})) = (K((T^{-1})))^p$. En particulier $\alpha^{(p-1)} = \alpha_{p-1}(T^p)(p-1)! \in (K((T^{-1})))^p$ et, d'autre part, $\alpha' = r \in K(T)$ entraîne que $\alpha = \beta^p + R$ avec $\beta \in K((T^{-1}))$, $R \in K(T)$ et $R' = r$.

Soit l'équation différentielle de Riccati

$$(R) \quad x' = ax^2 + bx + c \qquad \text{avec} \qquad a,\ b,\ c \in K(T).$$

Comme α et u sont solutions de (R), nous avons

$$\alpha' = a\alpha^2 + b\alpha + c \quad \text{et} \quad u' = au^2 + bu + c.$$

Ces deux égalités entrainent par soustraction,

$$(\alpha - u)' = a(\alpha - u)^2 + (b + 2au)(\alpha - u).$$

Posons $\gamma = 1/(\alpha - u)$, alors la dernière égalité entraîne

$$\gamma' = -a - (b + 2au)\gamma = a_1 + b_1\gamma \qquad \text{avec} \qquad a_1,\ b_1 \in K(T).$$

Dérivons cette égalité, il vient

$$\gamma'' = a_1' + b_1'\gamma + b_1\gamma' = a_1' + b_1'\gamma + b_1(a_1 + b_1\gamma) = a_1' + b_1a_1 + (b_1' + b_1^2)\gamma = a_2 + b_2\gamma$$

avec a_2 et $b_2 \in K(T)$. En réitérant la dérivation, nous obtenons

$$(1) \qquad \gamma^{(k)} = a_k + b_k\gamma \qquad \text{pour} \qquad 1 \le k \le p-1, \qquad \text{et avec} \qquad a_k,\ b_k \in K(T)$$

Maintenant, en remarquant que si $b_k = 0$ alors $b_{k+i} = 0$ pour $0 \le i \le p-1-k$, trois cas se présentent.

Cas 1: $b_1 = 0$
L'égalité (1) entraîne $\gamma' = a_1$ et par la remarque ci-dessus, il existe $\beta \in K((T^{-1}))$ et $r_1 \in K(T)$, tels que $\gamma = \beta^p + r_1$.
Cas 2: $b_{k-1} \neq 0$ et $b_k = 0$ pour k donné avec $2 \leq k \leq p-1$
Par (1) nous avons

$$\gamma^{(k-1)} = a_{k-1} + b_{k-1}\gamma \qquad \text{et} \qquad \gamma^{(k)} = a_k$$

donc $(\gamma^{(k-1)})' = a_k$. Par la remarque ci dessus, il existe $\beta \in K((T^{-1}))$ et $r_2 \in K(T)$, tels que $\gamma^{(k-1)} = \beta^p + r_2$. Alors il vient $\gamma = (\beta^p + r_2 - a_{k-1})/b_{k-1}$.
Cas 3: $b_{p-1} \neq 0$
L'égalité (1) entraîne $\gamma = (\gamma^{(p-1)} - a_{p-1})/b_{p-1}$ et donc, par la remarque ci-dessus, il existe $\beta \in K((T^{-1}))$, tels que $\gamma = (\beta^p - a_{p-1})/b_{p-1}$.

Alors d'après $\alpha = u + 1/\gamma$, dans chacun de ces cas on a une homographie à coefficients rationnels, f telle que $\alpha = f(\beta^p)$. Le lemme II.3 est ainsi établi.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème I.1, à partir du théorème II.2, toutefois avec une hypothèse plus forte : le corps K doit être fini. Ce résultat, qui utilise une remarque de J. Voloch ([19]), est dû à B. de Mathan.

THÉORÈME II.4. *Soit K un corps fini et $\alpha \in K((T^{-1}))$, algébrique, de degré n, sur $K(T)$. Si $\alpha \notin \mathcal{H}$, alors il existe une constante réelle positive C, dépendant de α, telle que*

$$|Q\alpha - P| \geq C|Q|^{-[n/2]}$$

pour tout couple $(P,Q) \in K[T] \times K[T]$, avec $Q \neq 0$.

Remarque. On notera que ce résultat est un peu plus précis que celui obtenu dans le thórème I.1, mais avec l'hypothèse restrictive d'un corps de base fini.
D'autre part, ici nous avons $n \geq 4$ et la conclusion de ce théorème est équivalente à $B(\alpha, [n/2]) > 0$.

Preuve . Nous supposons que $B(\alpha, [n/2]) = 0$ et nous allons montrer que $\alpha \in \mathcal{H}$. D'après le théorème II.2, nous savons que $B(\alpha, [n/2]) = 0$ implique que α est solution d'une équation différentielle de Riccati. De plus cette équation différentielle de Riccati admet une solution rationnelle, sinon nous avons déjà remarqué que l'on aurait $\nu(\alpha) = 1$. Donc, d'après le lemme II.3, il existe une homographie à coefficients rationnels f_1, et un élément $\alpha_1 \in K((T^{-1}))$, tels que $\alpha = f_1(\alpha_1^p)$. Alors $B(\alpha_1, [n/2]) = 0$ (voir le raisonnement au début du théorème II.3). Comme toute extension algébrique de $K(T)$ est séparable, nous avons $K(\alpha_1, T) = K(\alpha_1^p, T)$. Il s'en suit que α et α_1 ont le même degré, n, sur $K(T)$. Ainsi le même raisonnement s'applique à α_1, et il existe une homographie à coefficients rationnels f_2, et un élément $\alpha_2 \in K((T^{-1}))$, tels que $\alpha_1 = f_2(\alpha_2^p)$. Nous avons $\alpha = f_1((f_2(\alpha_2^p))^p)$, ou encore $\alpha = g_2(\alpha_2^{p^2})$, où g_2 est une homographie à coefficients rationnels. De proche en proche, il existe donc, pour tout $i \geq 1$, une homographie à coefficients rationnels g_i, et un élément $\alpha_i \in K((T^{-1}))$, tels que $\alpha = g_i(\alpha_i^{p^i})$. Soient L le corps de décomposition du polynôme minimal de α sur $K(T)$, et soit G le groupe de Galois des $K(T)-$automorphismes de L. Si $\sigma \in G$, nous avons $\sigma(\alpha) = g_i((\sigma(\alpha_i))^{p^i})$. Soient

σ_1, σ_2 et σ_3 dans G, alors considérons le birapport des 4 éléments $\alpha, \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha)$ et $\sigma_3(\alpha)$. Nous avons, pour $i \geq 1$,

$$[\alpha, \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)] = [g_i(\alpha_i^{p^i}), g_i((\sigma_1(\alpha_i))^{p^i}), g_i((\sigma_2(\alpha_i))^{p^i}), g_i((\sigma_3(\alpha_i))^{p^i})]$$

et en raison de l'invariance du birapport par une homographie, et de l'action de l'homomorphisme de Frobenius sur ce birapport, il vient

$$[\alpha, \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)] = [\alpha_i, \sigma_1(\alpha_i), \sigma_2(\alpha_i), \sigma_3(\alpha_i)]^{p^i}.$$

Donc

$$[\alpha, \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)] \in \bigcap_{i \geq 0} L^{p^i}.$$

Cette intersection, ensemble des fonctions constantes de L, est une extension algébrique K', de degré s de K. En effet si $\beta \in L^{p^s}$, alors le polynôme irréductible de β, sur $K(T)$, est à coefficients dans $K(T^{p^s})$, donc si $\beta \in \bigcap_{s \geq 0} L^{p^s}$, alors le polynôme irréductible de β, sur $K(T)$, est à coefficients dans K, i.e. β est algébrique sur K. Nous avons $K(T) \subset K'(T) \subset L$, donc $s = [K'(T) : K(T)]$ divise $n = [L : K(T)]$. Soit q le cardinal de K', nous avons $q = (\mathrm{card}(K))^s$. Alors, si $\sigma \in G$, nous avons

$$[\sigma(\alpha), \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)] = [\sigma(\alpha), \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)]^q$$

Comme $n \geq 4$, il existe σ_1, σ_2 et σ_3 dans G, tels que $\sigma_1(\alpha)$, $\sigma_2(\alpha)$ et $\sigma_3(\alpha)$ soient distincts deux à deux. Considérons l'unique homographie f, à coefficients dans L, telle que $\sigma_1(\alpha) = f((\sigma_1(\alpha))^q)$, $\sigma_2(\alpha) = f((\sigma_2(\alpha))^q)$ et $\sigma_3(\alpha) = f((\sigma_3(\alpha))^q)$. Nous pouvons écrire

$$[\sigma(\alpha), \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)] = [f(\sigma(\alpha)), f(\sigma_1(\alpha)), f(\sigma_2(\alpha)), f(\sigma_3(\alpha))]^q$$

donc

$$[\sigma(\alpha), \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)]^q = [f(\sigma(\alpha)^q), \sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \sigma_3(\alpha)].$$

Il en résulte que $\sigma(\alpha) = f((\sigma(\alpha))^q)$, pour tout $\sigma \in G$.

Soient $A, B, C, D \in L$ tels que $f(X) = (AX + B)/(CX + D)$. On peut supposer que l'un de ces coefficients soit égal à 1. Pour $\tau \in G$, notons f_τ l'homographie définie par $f(X) = (\tau(A)X + \tau(B))/(\tau(C)X + \tau(D))$. Comme $\tau\sigma(\alpha) = f_\tau((\tau\sigma(\alpha))^q)$, pour tous $\sigma, \tau \in G$, nous avons $f = f_\tau$, pour tout $\tau \in G$. Par conséquent nous obtenons $\tau(A) = A, \tau(B) = B, \tau(C) = C$ et $\tau(D) = D$, pour tout τ, $K(T)-$automorphisme de L, puisque l'un de ces coefficients est égal à 1. Ainsi, comme L est une extension galoisienne de $K(T)$, les coefficients de f sont des éléments de $K(T)$, donc $\alpha \in \mathcal{H}$. Le théorème est démontré.

Pour terminer ce paragraphe nous voulons donner un résultat classique de théorie élémentaire des nombres. Il est amusant de constater que ce résultat peut être obtenu comme un corollaire de la démonstration du théorème précédent.

COROLLAIRE II.4.1. *Soient λ_1 et λ_2 deux nombres entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres entiers définie par la relation de récurrence suivante :*

$$u_0 = 1, u_1 = \lambda_1 \quad \textit{et} \quad u_{n+2} = \lambda_1 u_{n+1} + \lambda_2 u_n \quad \textit{pour } n \geq 0.$$

Alors pour tout nombre premier p, avec $p > \sup(\lambda_1, \lambda_2)$, il existe $n \geq 0$ tel que p divise u_n.

PREUVE . Soit $p > \sup(\lambda_1, \lambda_2)$, un nombre premier. Il est facile de voir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$ unique avec $|\alpha| < 1$, défini par l'égalité

$$(1) \quad \alpha = 1/T + \lambda_1 \alpha^p + \lambda_2 \alpha^{p^2}$$

Le polynôme $\lambda_2 X^{p^2} + \lambda_1 X^p - X + 1/T$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p(T)$: en effet le polynôme réciproque de $\lambda_2 T X^{p^2} + \lambda_1 T X^p - TX + 1$ est T-d'Eisenstein. D'autre part, il est facile de voir que l'égalité (1) entraîne, pour tout $n \geq 1$,

$$(2) \quad \alpha = a_n + u_n \alpha^{p^n} + \lambda_2 u_{n-1} \alpha^{p^{n+1}}$$

où $a_n \in \mathbb{F}_p(T)$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie dans l'enoncé. L'égalité (2) montre que l'on a $\alpha = f_n(\alpha_n^{p^n})$, pour $n \geq 1$, avec $\alpha_n \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$ et f_n homographie à coefficients dans $\mathbb{F}_p(T)$. Donc nous concluons comme ci-dessus : $\alpha \in \mathcal{H}$. Alors comme $\alpha \in \mathcal{H}$, à cause de l'unicité mentionnée dans le lemme I.3, nous devons avoir, dans $\mathbb{F}_p$, $u_n = 0$, pour un certain n. Le corollaire est donc établi.

§3. Sur les équations différentielles de Riccati sans solution rationnelle.

Pour un élément α de $K((T^{-1}))$ satisfaisant une équation différentielle de Riccati sans solution rationelle, nous avons signalé, au début du paragraphe précédent, que l'on a $\nu(\alpha) = 1$ et $B(\alpha, \nu(\alpha)) > 0$. Alors une question se pose : existe-t-il des équations différentielles de Riccati avec une solution dans $K((T^{-1}))$ et sans solution dans $K(T)$?

Nous avons pensé que la réponse était négative. Au départ, nous avons étudié ce problème dans le cas où $\text{car}(K) = 2$. En cherchant à prouver l'existence d'une solution rationnelle, dans ce cas, nous avons trouvé des contre-exemples. Il faut indiquer que ces éléments particuliers ont été rencontrés, dans une toute autre approche, par L. Baum et M. Sweet [2] (voir Corollaire II.5.1). Pour le cas où la caractéristique du corps de base est supérieure à 2, nous n'avons obtenu que des résultats partiels. Rappelons, enfin, que le lemme II.3 permet d'obtenir toutes les solutions à partir d'une solution rationnelle.

Nous traitons d'abord le cas de l'équation différentielle linéaire.

LEMME II.4. *Soit K un corps de caractéristique p. Considérons l'équation différentielle*

$$(R) \quad x' = ax + b \quad \text{où} \quad a \text{ et } b \in K(T).$$

Si (R) a une solution dans $K((T^{-1}))$, alors (R) a une solution dans $K(T)$.

Preuve . Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ une solution de (R). Nous avons (1) $\alpha' = a\alpha + b$. En dérivant successivement cette égalité, et par substitution, il vient de proche en proche,

$$(2) \quad \alpha^{(k)} = a_k\alpha + b_k \quad \text{pour} k \geq 1.$$

Nous avons les formules de passage suivantes

$$(3) \quad a_{k+1} = a_k' + aa_k \text{ et } b_{k+1} = b_k' + ba_k \text{ avec } a_1 = a \text{ et } b_1 = b$$

En particulier on a :

$$\alpha^{(p)} = 0 = a_p\alpha + b_p$$

Si $a_p \neq 0$ alors (R) n'a qu'une solution $-b_p/a_p$. Si (R) a plus d'une solution alors $a_p = 0$ et $b_p = 0$. Définissons alors le plus petit entier, noté k_0, compris entre 1 et p, tel que $a_{k_0} = 0$.
Si $a_1 = a = 0$ alors $\alpha' = b$, et d'après la remarque faite dans le lemme II.3, nous savons qu'il existe $B \in K(T)$ tel que $B' = b$. B est donc une solution rationnelle de (R).
Si $k_0 > 1$ alors $a_{k_0-1} \neq 0$ et il vient

$$\alpha = (\alpha^{k_0-1} - b_{k_0-1})/a_{k_0} \text{ et } (\alpha^{(k_0-1)})' = b_{k_0}.$$

Il existe donc $u \in K(T)$ tel que $u' = b_{k_0}$. Posons $\alpha_0 = (u - b_{k_0-1})/a_{k_0-1}$. Nous avons $(a_{k_0-1}\alpha_0 + b_{k_0-1})' = u' = b_{k_0}$, donc $a_{k_0-1}\alpha_0' + a_{k_0-1}'\alpha_0 + b_{k_0-1}' = b_{k_0}$. Par (3), $a_{k_0-1}' + aa_{k_0-1} = a_{k_0} = 0$ et aussi $b_{k_0-1}' = b_{k_0} - ba_{k_0-1}$, il vient donc $a_{k_0-1}(\alpha_0' - a\alpha_0 - b) = 0$. Comme $a_{k_0-1} \neq 0$, $\alpha_0 \in K(T)$ est une solution de (R). Le lemme est établi.

Dans le lemme suivant, nous étudions l'équation différentielle de Riccati non linéaire, dans le cas où la caractéristique de K est 2.

LEMME II.5. *Soit K un corps parfait, de caractéristique 2. Considérons l'équation différentielle*

$$(R) \quad x' = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \quad a, b \text{ et } c \in K(T) \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Si (R) a plus de deux solutions dans $K((T^{-1}))$ (ou une solution non quadratique), alors il existe $\lambda \in K(T)$ et $d \in K(T)$ tels que :
$\alpha \in K((T^{-1}))$ est solution de (R) si et seulement si $\lambda\alpha$ est solution de l'équation différentielle

$$(R_1) \quad x' = x^2 + d^2.$$

Supposons de plus $K = \mathbb{F}_2$. Nous avons :
i) (R_1) a une solution dans $K((T^{-1}))$ si et seulement si le développement en série

de d ne comporte pas de terme en $1/T$.
ii) Si $D \in K[T]$, $D \neq 0$ et $d = 1/(T(1+TD))$, alors (R_1) a une solution dans $K((T^{-1}))$ et pas de solution dans $K(T)$.

Preuve . Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ solution de (R). Nous dérivons cette équation, il vient

$$\alpha'' = a'\alpha^2 + b'\alpha + b\alpha' + c'$$

$$0 = a'\alpha^2 + b'\alpha + b(a\alpha^2 + b\alpha + c) + c'$$

$$0 = (a' + ba)\alpha^2 + (b' + b^2)\alpha + bc + c'$$

car $\alpha'' = 0$ pour tout $\alpha \in K((T^{-1}))$. Alors si (R) a plus de deux solutions, la dernière égalité entraîne

$$(1) \quad a' + ba = 0 \quad b' + b^2 = 0 \quad bc + c' = 0.$$

Si $b = 0$, ces conditions entraînent $a' = 0$ et $c' = 0$. Donc il existe u et v dans $K(T)$ tels que $a = u^2$ et $c = v^2$. Ainsi α est solution de (R) si et seulement si $(u^2\alpha)' = (u^2\alpha)^2 + u^2v^2$.
Si $b \neq 0$, nous multiplions (R) par b, et obtenons $b\alpha' = ba\alpha^2 + b^2\alpha + bc$, soit compte tenu de (1), $b\alpha' = a'\alpha^2 + b'\alpha + c'$, ou encore $(b\alpha)' = a'\alpha^2 + c'$. Remarqons que $a' \neq 0$, par (1), avec $ab \neq 0$. De plus a', b' sont des carrés, et donc des constantes, dans $K(T)$. Nous obtenons , en multipliant la dernière égalité par a'/b^2, $((a'/b)\alpha)' = ((a'/b)\alpha)^2 + c'a'/b^2$.
Ainsi la première partie du lemme est démontrée.

Maintenant nous allons étudier l'équation differentielle (R_1), en supposant $K = \mathbb{F}_2$.
Remarquons d'abord que si d contient $1/T$ dans son dévelopement en série, alors (R_1) n'a pas de solution dans $K((T^{-1}))$. En effet, si $\alpha \in K((T^{-1}))$, alors $\alpha' + \alpha^2$ ne contient pas $1/T^2$ dans son développement en série, car le coefficient de $1/T^2$ est $\lambda + \lambda^2 = 0$ si λ est celui de $1/T$ dans le développement en série de α. Par conséquent $\alpha' + \alpha^2 \neq d^2$.
Soit $d \in K(T)$, sans terme en $1/T$ dans son développement en série. Si $d = d_1 + d_2$ et si x_i est solution de $x' = x^2 + d_i^2$ pour $i = 1, 2$, alors $x_1 + x_2$ est solution de (R_1). Montrons maintenant que si $d = T^n$ avec $n \geq 0$, alors (R_1) a une solution dans $K(T)$. Si $n = 2k$, alors T^{2k} est une solution. Si $n = 2k + 1$, on peut raisonner par récurrence sur n. En effet il est facile de voir que si x_k est une solution de (R_1), pour $n = k$, alors $T^{2k+1} + x_k$ est une solution pour $n = 2k + 1$.
Posons $d = E(d) + \delta$, où $E(d)$ est la partie entière de d. Alors d'après ce qui précède, l'équation différentielle, $x' = x^2 + (E(d))^2$, a une solution $u \in K(T)$. Remarquons que $|T\delta| < 1$, par hypothèse. Alors nous pouvons définir l'élément $v \in K((T^{-1}))$, par $v = (1/T)\sum_{n\geq 0}(T\delta)^{2^{n+1}}$. Observons que $(Tv) = (T\delta)^2 + (Tv)^2$, donc $v = T\delta^2 + Tv^2$ et par dérivation $v' = \delta^2 + v^2$. Nous avons donc $u + v$ solution de (R_1). (On peut remarquer que $u + v$ est algébrique, de degré inférieur ou égal à 2, sur $K(T)$.)
Il nous reste à montrer la dernière propriété. D'abord si $d = 1/(T(1+TD))$, nous avons $|Td| < 1$, donc (R_1) a une solution dans $K((T^{-1}))$. Nous pouvons plonger le corps $K(T)$ dans le corps $K((T))$. (Le corps $K((T))$ est le complété de $K(T)$

pour la valeur absolue $| \ |_0$, mentionnée dans le lemme II.1). Nous allons voir que cette équation n'a pas de solution dans ce corps et donc a fortiori dans $K(T)$. En effet, nous avons $d = 1/(T(1+TD)) = (1/T)\sum_{n\geq 0}(TD)^n$. Il apparaît ainsi que $|dT|_0 = 1$, c'est-à-dire que d contient le terme $1/T$ dans son développement en série dans $K((T))$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, dans le cas de $K((T^{-1}))$, l'équation différentielle, (R_1), ne peut avoir de solution dans $K((T))$. Ceci termine la démonstration du lemme.

Remarque. Dans la deuxième partie du lemme, nous avons considéré $K = \mathbb{F}_2$, pour simplifier. En fait on aurait pu obtenir un résultat similaire pour un corps fini de caractéristique 2. Considérons, par exemple, $K = \mathbb{F}_4 = \{0, 1, u, u^2\}$ avec $u^2 = u+1$. Alors l'équation $t^2+t = u^2$ n'a pas de solution en t dans K, donc le raisonnement ci-dessus montre que l'équation différentielle (R_1), n'a pas de solution dans $K((T^{-1}))$, si $d = u/T$: en effet il suffit de considérer le coefficient de $1/T$ dans x. Cependant, si $d = u/(T(T+1))$, par exemple, cette équation différentielle a une solution dans $K((T^{-1}))$, mais pas de solution dans $K(T)$.

Les conséquences de ce lemme sur l'approximation rationnelle de certains éléments de $\mathbb{F}_2((T^{-1}))$ sont intéressantes. Nous donnons, par exemple, le résultat ci-dessous, déjà obtenu par L. Baum et M. Sweet dans [2].

COROLLAIRE II.5.1. *Soit α et β deux éléments de $\mathbb{F}_2((T^{-1}))$, vérifiant*

$$(1) \quad \alpha^2 + T\alpha + 1 = (T+1)\beta^2,$$

alors pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{F}_2[T] \times \mathbb{F}_2[T]$ avec $Q \neq 0$ nous avons

$$(2) \quad |\alpha - P/Q| \geq |T|^{-1}|Q|^{-2}.$$

Remarque. Pour tout $\beta \in \mathbb{F}_2((T^{-1}))$, avec $|\beta| < 1$, nous avons l'existence et l'unicité de $\alpha \in \mathbb{F}_2((T^{-1}))$, liés par (1). En effet (1) s'écrit $\alpha = 1/T + (1 + 1/T)\beta^2 + \alpha^2/T = g(\alpha)$. L'application g est une contraction de la boule unité dans la boule unité, et admet donc un point fixe unique.
D'autre part, observons que la conclusion du corollaire est équivalente à dire que tous les quotients partiels (sauf le premier) du développement en fraction continue de α, sont des polynômes du premier degré.

Preuve . En dérivant l'égalité (1), nous obtenons $(T\alpha)' = \beta^2$. En reportant cette égalité dans (1), et en posant $\gamma = \alpha/(T(T+1))$, il vient

$$(3) \quad \gamma' = 1/(T(T+1))^2 + \gamma^2.$$

D'après le lemme précédent, cette équation différentielle n'a pas de solution rationnelle. Posons $H(x) = x' + x^2 + 1/(T(T+1))^2$. Alors, pour tout rationnel P/Q, nous avons (4) $\quad |H(P/Q)| \geq |Q|^{-2}|T|^{-4}$. D'autre part

$$(5) \quad |H(P/Q)| = |H(\gamma) - H(P/Q)| = \max(|(\gamma - P/Q)'|, |\gamma - P/Q|^2).$$

Nous avons $|(\gamma - P/Q)'| \leq |T|^{-1}\ |\gamma - P/Q|$. Si $|\gamma - P/Q|^2 > |T|^{-1}\ |\gamma - P/Q|$, alors $|\gamma - P/Q| > |T|^{-1}$. Sinon $|\gamma - P/Q|^2 \leq |T|^{-1}\ |\gamma - P/Q|$ et (5) entraîne

$$(6) \quad |H(P/Q)| \leq |T|^{-1}\ |\gamma - P/Q|.$$

En comparant avec (4), nous obtenons $|\gamma - P/Q| \geq |Q|^{-2}|T|^{-3}$. Cette inégalité est donc vraie pour tous les couples $(P,Q) \in K[T] \times K[T]$ avec $Q \neq 0$. Nous avons donc $|\alpha - PT(T+1)/Q| \geq |Q|^{-2}|T|^{-1}$ pour tous les couples $(P,Q) \in K[T] \times K[T]$ avec $Q \neq 0$. Le corollaire est établi.

Une question se pose alors : le cas de la caractéristique 2 est-il spécifique, pour l'existence d'équations différentielles de Riccati sans solutions rationnelles ? On peut le penser, vu le rôle joué par l'interférence entre l'élévation au carré et l'homomorphisme de Frobenius. Cependant nous n'avons pas pu y répondre en général. Pour essayer d'y répondre, nous avons utilisé une méthode qui, bien qu'élémentaire, nous a permis d'aboutir dans le cas de la caractéristique 3.

LEMME II.6. *Soit K un corps de caractéristique $p \geq 3$. Considérons l'équation différentielle*

$$(R) \quad x' = ax^2 + bx + c \quad \textit{où} \quad a, b \textit{ et } c \in K(T) \quad \textit{avec } a \neq 0.$$

Il existe $\lambda \neq 0, \mu \in K(T)$ et $d \in K(T)$ tels que :
$\alpha \in K((T^{-1}))$ est solution de (R) si et seulement si $\lambda\alpha + \mu$ est solution de l'équation différentielle

$$(R_1) \quad x' = x^2 + d.$$

Si $\mathrm{car}(K) = 3$ et si (R_1) a plus de deux solutions dans $K((T^{-1}))$ (ou une solution non quadratique) alors (R_1) a une solution dans $K(T)$.

Preuve . Posons $X = ax + b/2 + a'/2a$, alors il est facile de vérifier que, x est solution de l'équation (R) si et seulement si X est solution de l'équation (R_1) où d est l'élement de $K(T)$, défini par $d = ac - b^2/4 + b'/2 + (a'/2a)' - (a'/2a)^2$.
Maintenant supposons que la caractéristique de K est 3. Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ une solution de (R_1). Nous avons (1) $\alpha' = \alpha^2 + d$. En dérivant cette égalité, nous obtenons (2) $\alpha'' = 2\alpha^3 + 2d\alpha + d'$. Puis en dérivant de nouveau (3) $0 = \alpha^{(3)} = 2d\alpha^2 + 2d'\alpha + 2d62 + d''$. Ainsi l' hypothèse du lemme implique que les coefficients de cette équation sont nuls, donc $d = 0$. Alors (R_1) admet la solution rationnelle 0. Le lemme est démontré.

Remarque. En utilisant la même méthode pour les caractéristiques supérieures, on obtient comme ci-dessus, par exemple pour $p = 5$ ou $p = 7$, en dérivant, p fois, l'équation différentielle satisfaite par α, une équation algébrique de degré 2 satisfaite par α, d'où l'on tire une condition satisfaite par d. Cette condition ($d = 0$ pour $p = 3$) est une équation différentielle à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, d'ordre $p - 3$ ($2d'' + d^2 = 0$ pour $p = 5$). Cette équation différentielle admet $d = 0$ pour solution, mais a aussi d'autres solutions rationnelles, ce qui ne permet pas de conclure aussi facilement que pour $p = 3$.

§4. Sur des éléments de type Homographie-Frobenius algébriques de degré 4.

Dans ce dernier paragraphe, nous étudions la possibilité, pour un élément de $K((T^{-1}))$, algébrique sur $K(T)$, de reconnaître son appartenance à $\mathcal{H}$, à partir de son polynôme minimal. Nous nous sommes restreint au cas d'un élément algébrique de degré 4. Dans ce cas nous obtenons une condition suffisante simple pour que cet élément appartienne à $\mathcal{H}$.
Nous allons nous servir du fait qu'une condition nécessaire évidente (lemme II.3) pour appartenir à $\mathcal{H}$, est que cet élément satisfasse une équation différentielle de Riccati.

Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$, solution de l'équation algébrique de degré 4 :

$$(1) \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

où a, b, c et d sont dans $K(T)$ Alors α est solution d'une équation différentielle de la forme

$$(2) \qquad x' = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

où a_i est dans $K(T)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.

Si $\mathrm{car}(K) = 2$, alors nous avons vu, dans la démonstration du théorème II.3, que l'équation différentielle (2) est de Riccati si et seulement si $(ac)' = 0$.

Si $\mathrm{car}(K) > 2$, alors si α est solution de l'équation (1), en écrivant $\beta = \alpha + a/4$, nous voyons que β est solution de l'équation suivante :

$$(1') \qquad x^4 + Ax^2 + Bx + D = 0.$$

Dans ce cas, en écrivant l'équation différentielle issue de l'équation algébrique $(1')$, on peut voir que celle-ci est de Riccati, (i.e. $a_3 = 0$ dans (2)), si et seulement si

$$(3) \quad A'((3/2)AB^2 - 4A^2C + 16C^2) - BB'(A^2 + 12C) + C'(2A^3 + 9B^2 - 8AC) = 0.$$

Si $\mathrm{car}(K) = 3$, la condition ci dessus se réduit à :

$$B'BA^2 = (2A^2 + C)(AC)'.$$

Supposons que $\mathrm{car}(K) > 3$. La condition (3) peut aussi s'écrire :

$$(4) \quad 3B^2(A^2 + 12C)' - 2(B^2)'(A^2 + 12C) + 8(A^2 - 4C)(C'A - 2A'C) = 0.$$

On voit donc que si nous avons (5) $A^2 + 12C = 0$, alors $12C' = -2AA'$ donc $12C'A = -2A^2A' = 24CA'$, i.e. $C'A - 2A'C = 0$, et la condition (4) est manifestement satisfaite.

Nous avons donc étudié les solutions de $(1')$ dans $K((T^{-1}))$, avec la condition (5), et $\mathrm{car}(K) > 3$.

THEOREME II.5. *Soit p un nombre premier superieur à 3. Soient A, B et C des éléments de $\mathbb{F}_p(T)$ tels que $A^2 + 12C = 0$. Alors si $\alpha \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$ est solution de l'équation algébrique, irréductible*

$$(1) \qquad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

nous avons $\alpha \in \mathcal{H}_1$ si $p \equiv 1 \bmod 3$ et $p \leq 109$ et nous avons $\alpha \in \mathcal{H}_2 \setminus \mathcal{H}_1$ si $p \equiv 2 \bmod 3$, pour $p = 5, 11$ et 17

Remarque. La formulation du résultat peut surprendre. En effet les limitations sur la taille du nombre premier p sont imposées, comme nous le verrons, par la longueur des calculs effectués par ordinateur (cette longueur est liée à p ou p^2 suivant le reste de p modulo 3). On peut conjecturer le même résultat, sans limitation de la taille de p.
D'autre part la condition $A^2 + 12C = 0$ est suffisante pour que la solution de (1) satisfasse une équation différentielle de Riccati, mais pas nécessaire. En effet, soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ algébrique sur $K(T)$, de degré 4, avec $\alpha \notin \mathcal{H}$, considérons $\beta = f(\alpha^p)$ où f est une homographie à coefficients rationnels. Alors β est algébrique sur $K(T)$, de degré 4, satisfait une équation différentielle de Riccati, mais $\beta \notin \mathcal{H}$, donc les coefficients de l'équation algébrique satisfaite par β ne remplissent pas la condition ci-dessus (pour $p = 5$, par exemple).

PREUVE . Nous avons, pour tout entier $k \geq 0$, $\alpha^k \in \mathbb{F}_p(T, \alpha)$. Ainsi nous pouvons écrire, pour tout entier $k \geq 0$:

$$(2) \qquad \alpha^k = A_k + B_k\alpha + C_k\alpha^2 + D_k\alpha^3$$

où A_k, B_k, C_k et $D_k \in \mathbb{F}_p(T)$. Nous remarquons que l'existence d'une homographie, f, à coefficients dans $\mathbb{F}_p[T]$ telle que $\alpha = f(\alpha^k)$ est équivalente à l'existence d'une relation de dépendance linéaire, sur $\mathbb{F}_p(T)$, entre les quatre éléments $1, \alpha, \alpha^k$ et α^{k+1}. Ces quatre éléments sont liés sur $\mathbb{F}_p(T)$ si $C_k\alpha^2 + D_k\alpha^3$ et $C_{k+1}\alpha^2 + D_{k+1}\alpha^3$ sont liés sur $\mathbb{F}_p(T)$. Donc il existe une homographie, f, à coefficients dans $\mathbb{F}_p[T]$ telle que $\alpha = f(\alpha^k)$ si

$$C_{k+1}D_k - C_kD_{k+1} = 0.$$

Nous posons, pour tout entier $k \geq 0$: $\quad \Delta_k = C_{k+1}D_k - C_kD_{k+1}$. Nous voulons montrer que $\Delta_p = 0$, si $p \equiv 1 \bmod 3$, et $\Delta_p \neq 0$, $\Delta_{p^2} = 0$, si $p \equiv 2 \bmod 3$.
A partir de (1) et (2), nous pouvons écrire

$$\alpha^{k+1} = A_k\alpha + B_k\alpha^2 + C_k\alpha^3 + D_k(-C - B\alpha - A\alpha^2)$$

d'où l'on déduit, pour tout entier $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= C_k \\ C_{k+1} &= B_k - AD_k \\ B_{k+1} &= A_k - BD_k \\ A_{k+1} &= -CD_k \end{aligned}$$

Il vient alors $D_{k+2} = C_{k+1}$, on a donc

$$(3) \quad \Delta_k = D_{k+2}D_k - D_{k+1}^2.$$

D'autre part, nous avons $D_k + CD_{k-4} + BD_{k-3} + AD_{k-2} = B_{k-2} - A_{k-2} + CD_{k-4} + BD_{k-3} + AD_{k-2} = A_{k-3} + CD_{k-4} = 0$. Donc la suite $(D_k)_{k\geq 0}$ est définie par la relation de récurrence :

$$(4) \quad D_k = -AD_{k-2} - BD_{k-3} - CD_{k-4}$$

pour tout entier $k \geq 4$, avec les conditions initiales $D_0 = D_1 = D_2 = 0$ et $D_3 = 1$.

Maintenant nous introduisons l'hypothèse $A^2 + 12C = 0$, i.e. $C = (-1/12)A^2$. La relation de récurrence (4) et l'égalité précédente, montrent que $D_n \in \mathbb{F}_p[A, B]$ pour tout $n \geq 0$. On montre, par récurrence, à partir de (4), qu'il existe des éléments $d_{i,j} \in \mathbb{F}_p$ tels que

$$(5) \qquad D_{2k+1} = \sum_{l=0}^{[(k-1)/3]} d_{2k+1,l}A^{k-1-3l}B^{2l}$$

et

$$(6) \qquad D_{2k} = \sum_{l=0}^{[(k-3)/3]} d_{2k,l}A^{k-3-3l}B^{2l+1}$$

pour tout entier $k \geq 0$ (les sommes vides sont égales à 0).
Si l'on distingue deux cas, n pair ou n impair, on voit, à partir de (4), (5) et (6), que les coefficients $d_{i,j}$, des polynômes D_n, vérifient la relation de récurrence:

$$(7) \qquad d_{n,l} = -d_{n-2,l} - d_{n-3,l-\epsilon_n} + (1/12)d_{n-4,l}$$

avec $\epsilon_n = 0$ si n est pair, et $\epsilon_n = 1$ si n est impair.
La relation (7) est valable, pour $n \geq 0$ et $l \geq 0$, avec $d_{n,-1} = 0$ et $d_{n,l} = 0$ si $l \geq [n/6]$ et n pair, ou bien si $l \geq [(n+3)/6]$ et n impair. Les conditions initiales sont données par

$$(8) \quad d_{0,0} = d_{1,0} = d_{2,0} = 0 \quad \text{et} \quad d_{3,0} = 1.$$

Les égalités (3), (5) et (6) montrent que Δ_{2k+1} est un polynôme en A et B à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, pour tout $k \geq 0$, et qu'il existe des éléments $\delta_{2k+1,j} \in \mathbb{F}_p$ tels que :

$$(9) \qquad \Delta_{2k+1} = \sum_{l=0}^{[(2k-1)/3]} \delta_{2k+1,l}A^{2k-1-3l}B^{2l}$$

avec les formules liant les $\delta_{i,j}$ aux $d_{i,j}$ qui en découlent:

$$(10) \qquad \delta_{2k+1,l} = \sum_{i+j=l} d_{2k+3,i}d_{2k+1,j} - \sum_{i+j=l-1} d_{2k+2,i}d_{2k+2,j}$$

pour $k \geq 0$ et $0 \leq l \leq [(2k-1)/3]$.

Il nous reste à montrer que :

si $p \equiv 1 \bmod 3$ alors $\Delta_p = 0$, i.e. $\delta_{p,l} = 0 \qquad$ pour $0 \leq l \leq (p-2)/3$

si $p \equiv 2 \bmod 3$ alors $\Delta_{p^2} = 0$, i.e. $\delta_{p^2,l} = 0 \qquad$ pour $0 \leq l \leq (p^2-2)/3$

Ceci a été verifié, par ordinateur à partir de (7), (8) et (10), si $p \equiv 1 \bmod 3$ pour $p \leq 109$ et si $p \equiv 2 \bmod 3$ pour $p = 5, 11$ et 17.

CHAPITRE III
L'exposant d'approximation et le développement en fraction continue

§1. Sur l'exposant d'approximation de certains éléments algébriques de $K((T^{-1}))$.

Dans ce paragraphe nous allons donner des exemples d'éléments algébriques de $K((T^{-1}))$ pour lesquels on a calculé l'exposant d'approximation. Nous savons que ce nombre appartient à l'intervalle $I = [1, n-1]$, si n est le degré de l'élément algébrique considéré. Nous verrons que cet exposant peut prendre, dans certains cas, toutes les valeurs rationnelles d'un intervalle $I' = [\lambda, n-1]$, où $\lambda > 1$. Toutefois le calcul repose sur un résultat qui ne permet pas, dans les cas où il est appliqué, d'obtenir des valeurs proches de 1. Le principe de la proposition suivante est dû à J. F. Voloch ([18]). Nous en donnons ici une forme plus élaborée, avec sa démonstration, telle qu'elle se trouve dans [10].

PROPOSITION III.1. *Soit K un corps et $\alpha \in K((T^{-1}))$. Supposons qu'il existe une suite $(P_n, Q_n)_{n\geq 0}$, où P_n et Q_n sont des polynômes de $K[T]$, vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Il existe deux constantes réelles $\lambda > 0$ et $\mu > 1$, telles que*

$$|Q_n| = \lambda |Q_{n-1}|^{\mu} \quad \text{et} \quad |Q_n| > |Q_{n-1}| \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(2) *Il existe deux constantes réelles $\rho > 0$ et $\gamma > 1 + \sqrt{\mu}$, telles que*

$$|\alpha - P_n/Q_n| = \rho |Q_n|^{-\gamma} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Alors, si P.G.C.D.$(P_n, Q_n) = 1$ pour $n \geq 0$, nous avons

$$\nu(\alpha) = \gamma - 1 \quad \text{et} \quad B(\alpha, \nu(\alpha)) = \rho,$$

et si la suite $(\text{P.G.C.D.}(P_n, Q_n))_{n\geq 0}$ est bornée, nous avons

$$\nu(\alpha) = \gamma - 1 \quad \text{et} \quad B(\alpha, \nu(\alpha)) \neq 0, \infty.$$

Preuve . Supposons d'abord que $P.G.C.D.(P_n, Q_n) = 1$ pour $n \geq 0$. Il est clair que la condition (2) entraîne $\nu(\alpha) \geq \gamma - 1$ et $B(\alpha, \gamma - 1) \leq \rho$. Nous allons montrer qu'il existe deux constantes réelles $\rho' > 0$ et $\gamma' < \gamma$ telles que si $P/Q \in K(T)$, avec $|Q|$ assez grand, et P/Q différent de P_n/Q_n, alors $|\alpha - P/Q| \geq \rho' |Q|^{-\gamma'}$. Ceci impliquera que $\nu(\alpha) = \gamma - 1$ et que $B(\alpha, \gamma - 1) = \lim_n |Q_n|^{\gamma - 1} ||Q_n \alpha|| = \rho$.

Soit $P/Q \in K(T)$ avec $|Q| \geq \rho^{-1}|Q_0|^{\gamma-1}$. Nous avons donc $|Q_0| \leq (\rho|Q|)^{1/(\gamma-1)}$. Soit n le plus grand entier tel que $|Q_{n-1}| \leq (\rho|Q|)^{1/(\gamma-1)}$, nous avons donc

$$(\rho|Q|)^{1/(\gamma-1)} < |Q_n| \leq \lambda(\rho|Q|)^{\mu/(\gamma-1)}$$

d'après la condition (1). Alors si $P/Q \neq P_n/Q_n$, il vient

$$|\alpha - P_n/Q_n| = \rho|Q_n|^{-\gamma} < |QQ_n|^{-1} \leq |P/Q - P_n/Q_n|$$

et donc

$$|\alpha - P/Q| = |P/Q - P_n/Q_n| \geq |QQ_n|^{-1} \geq |Q|^{-1}\lambda^{-1}(\rho|Q|)^{-\mu/(\gamma-1)}$$

ou encore

$$|\alpha - P/Q| \geq \rho'|Q|^{-\gamma'} \quad \text{avec} \quad \rho' = \lambda^{-1}\rho^{-\mu/(\gamma-1)} \text{ et } \quad \gamma' = 1 + \mu/(\gamma-1).$$

Vu que $\gamma > 1 + \sqrt{\mu}$ implique $\gamma' < \gamma$, nous avons l'inégalité voulue et la première partie de la proposition en découle.

L'hypothèse P_n et Q_n premiers entre eux n'est pas nécessaire pour montrer que les meilleures approximations rationnelles de α sont les éléments de la suite $(P_n/Q_n)_{n\geq 0}$. Posons $D_n = P.G.C.D.(P_n, Q_n)$ et $P_n/Q_n = P'_n/Q'_n$ avec $P.G.C.D.(P'_n, Q'_n) = 1$. Alors la condition (2) s'écrit

$$|\alpha - P'_n/Q'_n| = \rho|Q'_n|^{-\gamma \deg Q_n/\deg Q'_n}$$

Il est donc clair que $\nu(\alpha) = \gamma - 1$, si et seulement si $\lim_n \deg Q_n/\deg Q'_n = 1$, ou encore si et seulement si $\lim_n \deg D_n/\deg Q_n = 0$. De plus, dans ce cas, comme $|Q'_n|^{-\gamma \deg Q_n/\deg Q'_n} = |Q'_n|^{-\gamma}|T|^{-\gamma \deg D_n}$, on a $B(\alpha, \nu(\alpha)) = 0$ si et seulement si $\lim_n \deg D_n = \infty$. Ceci termine la démonstration.

Nous allons utiliser cette proposition pour déterminer l'exposant d'approximation de certaines classes d'éléments algébriques de $K((T^{-1}))$.

§1.1. Les racines n-ièmes d'un rationnel.

Soit K un corps de caracteristique p. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec P.G.C.D.$(n, p) = 1$. Soit $R \in K(T)$, R n'etant pas une puissance n-ième d'un élément de $K(T)$. Nous considérons l'équation algébrique irréductible

$$(1) \qquad x^n = R.$$

Si $n > 2$, et si α est une solution de (1) dans $K((T^{-1}))$, alors nous savons que cette solution a un exposant d'approximation, $\nu(\alpha)$, dans l'intervalle $[1, n-1]$. Nous voulons préciser la valeur de $\nu(\alpha)$ en fonction de R, et en particulier déterminer R pour qu'il soit maximal.

Si s est l'ordre de p dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, posons $q = p^s$ et $r = (q-1)/n$, alors toute solution de l'équation (1) est solution de

$$(2) \qquad x = R^r x^q.$$

Donc toute solution de l'équation (1) est un élément de $\mathcal{H}$. Ainsi nous pouvons utiliser la méthode des chaînes de réduites, décrite dans [9], pour ces éléments.

Si $\alpha \in K((T^{-1}))$ est solution de (1), alors $\alpha = a_k T^k + a_{k-1}T^{k-1} + ...$, et $\alpha / a_k T^k$ est solution de (1) avec un nouveau R unitaire de degré 0. Nous pouvons donc considérer les équations (1) avec $R = P/Q$, où P et Q sont deux polynômes unitaires de $K[T]$, de même degré et premiers entre eux. Dans ce cas si α est une solution de (1), les autres solutions sont $a\alpha$ où $a \in K$ et $a^n = 1$.

C. Osgood, (voir [13]), a été le premier à remarquer que, pour $R = 1 + 1/T$, l'équation (1) a une solution dans $K((T^{-1}))$, avec un exposant d'approximation maximal, égal à $n - 1$. En substituant à T un polynôme $C \in K[T]$, de degré supérieur ou égal à 1, l'exposant d'approximation est conservé, et nous obtenons un élément ayant la même propriété d'approximation rationnelle. Nous allons prouver la réciproque de ce résultat, comme corollaire de la proposition suivante.

Nous donnons deux corollaires de cette proposition. Le premier est la réciproque du résultat de C. Osgood.

COROLLAIRE III.2.1. *Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Soit n un entier supérieur à 2, tel que n et p soient premiers entre eux. Soient P et Q deux polynômes unitaires de $K[T]$, de même degré et premiers entre eux. Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ avec $\alpha^n = P/Q$. Alors $\nu(\alpha) = n - 1$ si et seulement s'il existe P_0, Q_0 et $C \in K[T]$ tels que $P/Q = (P_0/Q_0)^n(1 + 1/C)$.*

PREUVE . Si $\alpha^n = (P_0/Q_0)^n(1 + 1/C)$ alors $(\alpha Q_0/P_0)^n = (1 + 1/C)$ et $\nu(\alpha) = \nu(\alpha Q_0/P_0) = n - 1$, d'aprés *ii*). Réciproquement si $\nu(\alpha) = n - 1$, alors par *iii*) on peut écrire $P/Q = (P_0/Q_0)^n(A/B)$ avec $\nu(\alpha) = n - 1 - n\deg(A - B)/\deg(B)$. Donc deg $(A - B) = 0$, c'est-à-dire $A/B = 1 + 1/C$ où $C \in K[T]$.

Dans [9], B. de Mathan a posé la question de savoir si une racine n-ième d'un rationnel peut avoir un exposant d'approximation égal à 1. Le deuxième corollaire est motivé par cette question, sans en apporter la réponse.

COROLLAIRE III.2.2. *Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Soit n un entier supérieur à 2, tel que n et p soient premiers entre eux. Soient P et Q deux polynômes unitaires de $K[T]$, de même degré et premiers entre eux. Supposons que $P/Q \notin K(T)^n$. Soit $\alpha \in K((T^{-1}))$ tel que $\alpha^n = P/Q$. Alors $\nu(\alpha) > 1$ si et seulement s'il existe A, B, P_0 et Q_0 dans $K[T]$ tels que :*

$$|A| = |B| \textit{ et } P.G.C.D.(A, B) = 1 \qquad |P_0| = |Q_0| \textit{ et } P.G.C.D.(P_0, Q_0) = 1$$

$$P/Q = A/B(P_0/Q_0)^n \quad \textit{et} \quad \deg(A - B) < (1 - 2/n)\deg(B).$$

PREUVE . Si $\nu(\alpha) > 1$ alors, par *iii*), nous avons les conditions voulues car $\nu(\alpha) = n - 1 - n\deg(A - B)/\deg(B) > 1$ entraîne deg $(A - B) < (1 - 2/n)\deg(B)$. Réciproquement si les conditions sont remplies alors $(\alpha Q_0/P_0)^n = A/B$ et par *i*) nous avons $\nu(\alpha) = \nu(\alpha Q_0/P_0) \geq n - 1 - n\deg(A - B)/\deg(B) > 1$.

§1.2. Les solutions d'équations du type $x = a_0 + \sum_{1\le i\le k} a_i x^{q_i}$.

Ici nous allons voir comment on peut appliquer la proposition III.1 à une catégorie d'éléments qui englobe une partie de $\mathcal{H}$. Il s'agit des solutions d'équations du type

$$x = a_0 + \sum_{1\le i\le k} a_i x^{q_i}$$

où les $a_i \in K(T)$ et les q_i sont des puissances de la caractéristique p de K. Pour illustrer notre propos nous avons choisi une famille particulière d'équations de ce type. Ainsi nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION III.3. *Soient m, m_1 et m_2 trois entiers tels que $m \ge 1$, $m_1 \ge 0$ et $m_2 \ge 0$. Considérons l'équation algébrique*

$$(1) \quad x = T^{-m} + T^{-m_1}x^p + T^{-m_2}x^{p^2}.$$

Cette équation admet une racine α_0 dans $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$, avec $|\alpha_0| < 1$. Si de plus $m_1 = 0$ ou $m_2 = 0$ avec $m_1 + m_2 > 0$, alors cette équation admet p racines α_i, pour $i = 0, ..., p-1$, dans $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$. Dans ce cas, il existe $\omega \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$ avec $|\omega| = 1$ et $\alpha_i = \alpha_0 + i\omega$ pour $i = 1, ..., p-1$.

Si $m = 1$, $m_1 = 0$, $m_2 = 2$, et $p \ge 3$ nous avons

$$\nu(\alpha_0) = p(p^2-1)/(p^2+1) - 1 \qquad \text{et } \nu(\alpha_i) = (p^2-1)/(2p) - 1 \text{ pour } i = 1, .., p-1$$

lorsque ces quantités sont supérieures à $\sqrt{p}$.

Preuve . Soit f l'application de $K((T^{-1}))$ dans $K((T^{-1}))$, définie par $f(x) = T^{-m_1}x^p + T^{-m_2}x^{p^2}$. Cette application est $\mathbb{F}_p$−linéaire. De plus si $|x| \le 1$ alors $|f(x)| \le |x|^p$, et donc par itération $|f^k(x)| \le |x|^{p^k}$, pour tout $k \ge 1$. Il s'en suit que $|f^k(T^{-m})| \le |T^{-m}|^{p^k}$, pour tout $k \ge 1$. Alors la suite $(f^k(T^{-m}))_{k\ge 0}$ converge vers 0, et donc la série $\sum_{k\ge 0} f^k(T^{-m})$ converge dans $K((T^{-1}))$. Si on note α_0 cette limite, il est clair que $|\alpha_0| < 1$ et $f(\alpha_0) = \alpha_0 - T^{-m}$, donc α_0 est solution de l'équation (1).
Si de plus $m_1 = 0$ ou $m_2 = 0$ avec $m_1 + m_2 > 0$, alors nous avons $|f(1) - 1| < 1$. Comme $f^{k+1}(1) - f^k(1) = f^k(f(1) - 1)$ nous avons $\lim_k(f^{k+1}(1) - f^k(1)) = 0$, donc la suite $(f^k(1))_{k\ge 0}$ converge dans $K((T^{-1}))$. Notons ω cette limite, nous avons $|\omega| = 1$ et $f(\omega) = \omega$. Si l'on pose $\alpha_i = \alpha_0 + i\omega$, pour $i = 1, ..., p-1$, alors $f(\alpha_i) = f(\alpha_0) + if(\omega) = \alpha_i - T^{-m}$, donc α_i est solution de l'équation (1).

Considérons maintenant l'équation particulière

$$(2) \quad x = T^{-1} + x^p + T^{-2}x^{p^2}$$

avec $p \ge 3$. On voit que $\alpha_0 = \sum_{k\ge 0} f^k(T^{-1}) = \sum_{l\ge 0} T^{-n_l}$. On peut remarquer que la suite $(n_l)_{l\ge 0}$ est constituée des entiers naturels dont l'écriture en base p est $n_l = 10x_1x_2x_3...x_j$, où les chiffres suivant les deux premiers, s'il y en a, sont tous égaux à 0 ou 2, sans que deux chiffres 2 soient consécutifs. De même on a $\alpha_i = \sum_{l\ge 0} T^{-n_l} + \sum_{l\ge 0} iT^{-m_l}$. On peut remarquer que la suite $(m_l)_{l\ge 0}$, disjointe

de la suite $(n_l)_{l\geq 0}$, est constituée des entiers naturels dont l'écriture en base p est la même que celle d'un entier n_l, sauf pour le premier chiffre, où le chiffre 1 est remplacé par le chiffre 2.
Nous allons approcher α_0. Considérons l'entier λ_k, de la suite $(n_l)_{l\geq 0}$, tel que

$$\lambda_k = p^k + 2(p^{k-2} + p^{k-4} + ... + p \text{ ou } 1)$$

L'entier suivant λ_k dans la suite $(n_l)_{l\geq 0}$ est p^{k+1}. Posons $P_k/Q_k = \sum_{n_l\leq\lambda_k} T^{-n_l}$, avec $Q_k = T^{\lambda_k}$. Alors nous avons

$$|\alpha_0 - P_k/Q_k| = |T|^{-p^{k+1}} = |Q_k|^{-p^{k+1}/\lambda_k} \quad \text{et} \quad |Q_{k+1}| = |Q_k|^{\lambda_{k+1}/\lambda_k}.$$

Donc nous avons, pour k pair, vu que $\lambda_k = p^k + 2(p^k - 1)/(p^2 - 1)$,

$$|\alpha_0 - P_k/Q_k| = |T|^{-2p/(p^2-1)}|Q_k|^{-p(p^2-1)/(p^2+1)} \quad \text{et} \quad |Q_{k+1}| = |Q_k|^p$$

et, pour k impair, avec $\lambda_k = p^k + 2p(p^{k-1} - 1)/(p^2 - 1)$,

$$|\alpha_0 - P_k/Q_k| = |T|^{-2p^2/(p^2-1)}|Q_k|^{-p(p^2-1)/(p^2+1)} \quad \text{et} \quad |Q_{k+1}| = |T|^2|Q_k|^p$$

Nous pouvons appliquer la proposition III.1 (avec une modification due au fait que les deux constantes ρ et λ prennent deux valeurs distinctes suivant la parité de k). Ainsi nous avons $\nu(\alpha_0) = p(p^2 - 1)/(p^2 + 1) - 1$, si cette quantité est supérieure à $\sqrt{p}$.
Maintenant nous allons approcher α_i. Nous avons $\alpha_i = \sum_{l\geq 0} a_{n'_l}T^{-n'_l}$ où $a_{n'_l} = 1$ ou i, et n'_l représente n_l ou m_l. Dans ce cas, considérons l'entier λ_k, de la suite $(n'_l)_{l\geq 0}$, tel que

$$\lambda_k = 2(p^k + p^{k-2} + p^{k-4} + ... + p \text{ ou } 1)$$

L'entier suivant λ_k dans la suite $(n'_l)_{l\geq 0}$ est p^{k+1}. Posons $P_k/Q_k = \sum_{n'_l\leq\lambda_k} a_{n'_l}T^{-n'_l}$, avec $Q_k = T^{\lambda_k}$. Alors nous avons

$$|\alpha_i - P_k/Q_k| = |T|^{-p^{k+1}} = |Q_k|^{-p^{k+1}/\lambda_k} \quad \text{et} \quad |Q_{k+1}| = |Q_k|^{\lambda_{k+1}/\lambda_k}$$

Donc nous avons, pour k pair, vu que $\lambda_k = 2(p^{k+2} - 1)/(p^2 - 1)$,

$$|\alpha_0 - P_k/Q_k| = |T|^{-p}|Q_k|^{-(p^2-1)/(2p)} \quad \text{et} \quad |Q_{k+1}| = |Q_k|^p$$

et, pour k impair, avec $\lambda_k = 2p(p^{k+1} - 1)/(p^2 - 1)$,

$$|\alpha_0 - P_k/Q_k| = |T|^{-1}|Q_k|^{-(p^2-1)/(2p)} \quad \text{et} \quad |Q_{k+1}| = |T|^2|Q_k|^p$$

Donc, en appliquant la proposition III.1, nous avons $\nu(\alpha_i) = (p^2 - 1)/(2p) - 1$, si cette quantité est supérieure à $\sqrt{p}$, et pour $i = 1, ..., p - 1$.
Observons aussi que, pour $i = 0, ..., p - 1$, nous avons $B(\alpha_i, \nu(\alpha_i))$ fini et non nul.

Remarque. Il est facile de voir que si α est solution de (1), avec $m \geq 1$ et $m_1, m_2 \geq 0$, alors, sauf si $m_1 = m_2 = 0$, on a $\alpha \notin \mathcal{H}$. En effet nous avons vu à la fin du

chapitre I que, si α est solution de (1), alors il existe e_s, f_s et g_s dans $K(T)$ tels que $\alpha = e_s + f_s\alpha^{p^s} + g_s\alpha^{p^{s+1}}$, pour tout $s \geq 1$. Pour des raisons de degré on peut voir que $f_s.g_s \neq 0$, pour tout $s \geq 1$, et ceci entraîne $\alpha \notin \mathcal{H}$. Donc, si l'équation est irréductible (c'est le cas pour l'équation (2)), on doit avoir $\nu(\alpha) \leq p$, comme nous l'avons vu à la fin du chapitre I, par application du théorème I.2.
D'autre part, signalons que si nous avons donné des valeurs particulières à m, m_1 et m_2, c'est pour simplifier l'exposé et réduire la longueur de la rédaction. En fait le même raisonement, basé sur l'écriture des entiers en base p, peut s'appliquer pour l'équation (1), dans une situation plus générale. On obtient, en particulier, avec $m \geq 1$ et $0 \leq m_1, m_2 \leq p-1$, les résultats suivants :
si $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$, nous avons pour α_0

$$\nu(\alpha_0) = p(m + m_2/(p^2-1))/(m + m_1/(p-1)) - 1.$$

Si un seul des deux entiers m_1 et m_2 est nul, en notant m' celui qui est non nul et $l = 1$ si $m' = m_1$, $l = 2$ si $m' = m_2$, nous avons pour α_0

$$\nu(\alpha_0) = pm/(m + m'/(p^l - 1)) - 1$$

et pour les $p-1$ autres racines α_i, avec $1 \leq i \leq p-1$,

$$\nu(\alpha_i) = pm'/(m + m'/(p^l - 1)) - 1 \quad \text{si} \quad m' \leq m$$

$$\nu(\alpha_i) = m(p^l - 1)/(m'p^{l-1}) - 1 \quad \text{si} \quad m' \geq m$$

à condition que chacune de ces quantités soit supérieure à $\sqrt{p}$. On peut remarquer que, dans tous les cas, on a $\nu(\alpha) < p-1$.

§1.3. Les fonctions rationnelles d'éléments de $\mathcal{H}$.

Nous montrons ici comment on peut déterminer l'exposant d'approximation d'éléments qui sont les images, par une fonction rationnelle, de certains éléments de $\mathcal{H}$. Ce phénomène a été remarqué par J.F. Voloch, dans [19]. Nous utilisons la proposition suivante :

PROPOSITION III.4. *Soit K un un corps de caractéristique p. Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^s$. Soit $\alpha \in \mathcal{H}_s$ et $R \in K[T](X)$. Supposons que $R'_X(\alpha) \neq 0$. Si $R = U/V$ où U et V sont deux polynômes de $K[T, X]$, premiers entre eux, nous posons $d = \max(\deg_X U, \deg_X V)$.*

Alors si $\nu(\alpha) > d(\sqrt{q}+1) - 1$ on a $\nu(R(\alpha)) = (\nu(\alpha)+1)/d - 1$

et $B(R(\alpha), \nu(R(\alpha))) \neq 0, \infty$.

Remarque. Si $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite qui converge vers α, nous avons $\lim_n (R(\alpha) - R(\alpha_n))/(\alpha - \alpha_n) = R'_X(\alpha)$. Donc si $R'_X(\alpha) \neq 0$, et si n est assez grand nous avons

$$(H) \qquad |R(\alpha) - R(\alpha_n)| = C|\alpha - \alpha_n|$$

où $C = |R'_X(\alpha)|$ est une constante réelle positive. Signalons que la proposition donnée dans [19] est inexacte dans le cas général. En effet la condition ci-dessus est supposée réalisée, ce qui n'est pas toujours vrai. Par exemple, si $R(X) = X^k$, pour appliquer la proposition il faudra que l'entier k soit premier avec p.

Preuve . Comme $\alpha \in \mathcal{H}_s$, nous savons, (cf. [9]), qu'il existe une suite d'approximations rationnelles de α, $(P_n/Q_n)_{n\geq 0}$, telle que

$$(1) \quad |\alpha - P_n/Q_n| = C_1|Q_n|^{-(\nu(\alpha)+1)}$$

pour tout $n \geq 0$, où C_1 est une constante réelle positive. Nous avons aussi $P.G.C.D.(P_n, Q_n) = 1$ et il existe un réel positif ρ, tel que $|Q_{n+1}| = \rho|Q_n|^q$, pour tout n. Alors d'après (H), nous avons, pour n assez grand

$$(2) \quad |R(\alpha) - R(P_n/Q_n)| = C|\alpha - P_n/Q_n| = CC_1|Q_n|^{-(\nu(\alpha)+1)}.$$

D'autre part nous avons $R = U/V$ avec U et V premier entre eux dans $K[T][X]$, et $d = \max(\deg_X U, \deg_X V)$. Donc $R(P_n/Q_n) = U_n/V_n$ avec

$$U_n = Q_n^d U(P_n/Q_n) \quad \text{et} \quad V_n = Q_n^d V(P_n/Q_n).$$

Il existe donc un réel positif ρ_1 tel que $|V_n| = \rho_1|Q_n|^d$, pour n assez grand. Alors (2) peut s'écrire

$$(3) \quad |R(\alpha) - U_n/V_n| = CC_1\rho_1^{(\nu(\alpha)+1)/d}|V_n|^{-(\nu(\alpha)+1)/d}$$

avec $|V_{n+1}| = \rho_1^{1-q}\rho|V_n|^q$.
D'autre part, comme $P.G.C.D.(P_n, Q_n) = 1$, on peut montrer, en utilisant le même raisonnement que dans le Lemme I.6 du chapitre I, que $P.G.C.D.(U_n, V_n)$ divise un polynôme de $K[T]$ qui ne dépend que de U et V. Alors le résultat découle de la proposition III.1.

Nous donnons deux types d'exemples d'application de cette proposition :

Exemple 1. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$, l'exemple de Mahler, vérifiant $\alpha = T^{-1} + \alpha^q$, où q est une puissance de p. Alors nous avons $\nu(\alpha) = q - 1$. Donc si k et p sont premiers entre eux et si $k < q/(\sqrt{q} + 1)$, la proposition ci-dessus entraîne $\nu(\alpha^k) = q/k - 1$. Soit $q \geq 5$ et impair. Posons $\beta = \alpha^2$, alors on peut voir que β est de degré q et $\beta \notin \mathcal{H}$ (on montre que β ne satisfait pas une équation différentielle de Riccati). Par conséquent, d'après le théorème I.1, on doit avoir $\nu(\beta) \leq [q/2]$. D'autre part, pour q assez grand, nous avons vu que l'on a $\nu(\beta) = q/2 - 1$. Le théorème I.1 est donc presque optimal.

Exemple 2. Soit α l'élément de $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ vérifiant $\alpha = 1/(T + \alpha^q)$, où q est une puissance de p. Alors $\alpha = [0, T, T^q, T^{q^2}, ...]$ et on a $\nu(\alpha) = q$. Donc si k et p sont premiers entre eux et si $k < (q + 1)/(\sqrt{q} + 1)$, la proposition ci-dessus entraîne $\nu(\alpha^k) = (q + 1)/k - 1$. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que, si q est impair, ceci reste vrai pour $k = (q + 1)/2$.

§2. Sur le développement en fraction continue de Buck et Robbins.

Dans ce paragraphe nous décrivons le développement en fraction continue d'un élément de $\mathbb{F}_3((T^{-1}))$, satisfaisant une équation algébrique du quatrième degré. Puis à partir de ce développement en fraction continue, nous donnons les propriétés d'approximation rationnelle de cet élément.

Cet élément a été mentionné pour la première fois par W. Mills et D. Robbins dans [11]. Son remarquable développement en fraction continue a été observé par ordinateur et sélectionné parmi celui de plusieurs éléments algébriques de degré 4. Il s'agit de la solution dans $\mathbb{F}_3((T^{-1}))$ de l'équation algébrique

$$(1) \qquad x^4 + x^2 - Tx + 1 = 0.$$

Pour comprendre et établir la particularité du développement en fraction continue de cet élément, nous allons mettre à jour son origine qui est cachée par l'équation (1), et voir qu'il fait partie d'une suite d'éléments particuliers.

Soit p un nombre premier impair et $q = p^s$ où s est un entier supérieur ou égal à 1. Soit $K = \mathbb{F}_p$. Nous considérons l'élément α_q de $K((T^{-1}))$ défini par son développement en fraction continue :

$$(2) \qquad \alpha_q = [0, T, T^q, ..., T^{q^n}, ...]$$

Il est clair que cet élément est la seule solution, dans $K((T^{-1}))$, de l'équation algébrique

$$(3) \qquad x = 1/(T + x^q)$$

Nous posons $r = (q+1)/2$ et nous considérons l'élément θ_q, de $K((T^{-1}))$, défini par $\theta_q = \alpha_q^r$.

Comme α_q est solution de (3), il vient $\alpha_q = (1/T)(1 - \alpha_q^{2r})$, et ceci entraîne, par élévation à la puissance r, $\theta_q = (1/T^r)(1 - \theta_q^2)^r$. Ainsi θ_q est une solution de l'équation algébrique

$$(4) \qquad x = (1/T^r)(1 - x^2)^r$$

Nous pouvons voir que cette équation n'a qu'une solution dans $K((T^{-1}))$. En effet : Si x est une solution de (4), dans $K((T^{-1}))$, nous devons avoir $|x| \leq 1$. Sinon $|x| > 1$ entraîne $|(1 - x^2)^r| = |x|^{2r}$, et par (4), $|T|^r = |x|^q$ ce qui est impossible. Considérons l'ensemble $E = \{x \in K((T^{-1}))/ \quad |x| \leq 1\}$, et l'application f de E dans lui-même définie par $f(x) = (1/T^r)(1 - x^2)^r$. Alors nous pouvons voir que f est une contraction, E est complet, et par conséquent $f(x) = x$ a une solution unique dans E. Ainsi θ_q est la seule solution de (4) dans $K((T^{-1}))$. D'autre part les coefficients de cette équation sont des éléments de $K(T^r)$, donc sa solution θ_q est un élément de $K((T^{-r}))$. Alors nous pouvons introduire l'élément θ_q^* de $K((T^{-1}))$, défini par $\theta_q(T) = \theta_q^*(T^r)$. Donc θ_q^* est la seule solution, dans $K((T^{-1}))$, de l'équation algébrique

$$(5) \qquad x = (1/T)(1 - x^2)^r.$$

Maintenant nous pouvons voir que la solution de (1), dans $\mathbb{F}_3((T^{-1}))$, est θ_3^*. En effet nous avons, d'après (5), $\theta_3^* = (1/T)(1-(\theta_3^*)^2)^2 = (1/T)(1+(\theta_3^*)^2+(\theta_3^*)^4)$, donc θ_3^* est solution de (1).

Nous allons voir qu'il est possible de déduire le développement en fraction continue de θ_3^* de celui de α_3. Le développement en fraction continue de α_q, donné par (2), et le lien entre θ_q et α_q, i.e. $\theta_q = \alpha_q^r$, sont assez simples pour que l'on puisse obtenir une description partielle du développement en fraction continue de θ_q. Toutefois, mis à part le cas $q = 3$, nous n'avons pas pu aboutir à une description complète de ce développement.

Nous partons du développement en fraction continue de α_q. Considérons les deux suites usuelles de polynômes de $K[T]$, définies inductivement par

$$P_0 = 0, P_1 = 1, Q_0 = 1, Q_1 = T, P_n = T^{q^{n-1}}P_{n-1}+P_{n-2} \quad Q_n = T^{q^{n-1}}Q_{n-1}+Q_{n-2}$$

pour $n \geq 2$. Ainsi $(P_n/Q_n)_{n\geq 0}$ est la suite des réduites de α_q. D'après (2), pour $n \geq 1$, nous avons

$$P_n/Q_n = [0, T, T^q, ..., T^{q^{n-1}}] = 1/(T + (P_{n-1}/Q_{n-1})^q).$$

Comme P_n et Q_n sont premiers entre eux et tous deux unitaires, nous obtenons

$$(6) \qquad \begin{cases} P_0 = 0 & P_n = Q_{n-1}^q \\ Q_0 = 1 & Q_n = TQ_{n-1}^q + P_{n-1}^q \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Maintenant considérons le développement en fraction continue de θ_q. Nous posons $\theta_q = [a_0, a_1, ..., a_n, ...]$. Remarquons que $a_0 = 0$, d'après la définition de θ_q, vu que $|\alpha_q| < 1$. Puis nous introduisons les deux suites usuelles de polynômes de $K[T]$, définies inductivement par

$$U_0 = 0, U_1 = 1, V_0 = 1, V_1 = a_1, \quad U_n = a_nU_{n-1} + U_{n-2} \quad V_n = a_nV_{n-1} + V_{n-2}$$

pour $n \geq 2$. Ainsi $(U_n/V_n)_{n\geq 0}$ est la suite des réduites de θ_q.

Dans un premier temps, nous allons donner quelques sous-suites particulières de réduites de θ_q.

Nous utilisons les résultats auxiliaires suivants :

LEMME III.1. *Pour $n \geq 0$, le polynôme a_n est un polynôme impair de la variable T^r et le rationnel $(P_n/Q_n)^r$ est une réduite de θ_q.*

PREUVE . Nous savons que l'équation (5) admet θ_q^* comme unique solution dans $K((T^{-1}))$. A partir de (5), nous voyons que

$$\theta_q^*(-T) = (-1/T)(1-(\theta_q^*(-T))^2)^r \quad \text{d'où} \quad -\theta_q^*(-T) = (1/T)(1-(-\theta_q^*(-T))^2)^r$$

Par conséquent $-\theta_q^*(-T)$ est aussi solution de (5), et nous en déduisons que $-\theta_q^*(-T)$ $= \theta_q^*(T)$. C'est-à-dire que θ_q^* est un élément impair de $K((T^{-1}))$. Par récurrence, nous voyons que les quotients partiels du développement en fraction continue de θ_q^* sont des polynômes impairs de $K[T]$. À cause de l'identité $\theta_q^*(T^r) = \theta_q(T)$, si nous écrivons $\theta_q^* = [a_0^*(T), a_1^*(T), ..., a_n^*(T), ...]$, alors nous avons $a_n(T) = a_n^*(T^r)$.

Maintenant montrons que $(P_n/Q_n)^r$ est une réduite de θ_q. En effet, pour $n \geq 0$, nous avons

$$|\alpha_q^r - (P_n/Q_n)^r| \ = \ |\alpha_q - P_n/Q_n| \ |\sum_{0 \leq i \leq k-1} \alpha_q^i (P_n/Q_n)^{k-1-i}|.$$

Comme $|\alpha_q| \ = \ |P_n/Q_n| \ = \ |T|^{-1}$, nous avons r termes dans la somme, chacun de valeur absolue $|T|^{-r+1}$ et de coefficient dominant 1. Par conséquent, comme r et p sont premiers entre eux, ceci devient

$$|\alpha_q^r - (P_n/Q_n)^r| \ = \ |\alpha_q - P_n/Q_n| \ |T|^{-r+1} = \ |Q_n Q_{n+1}|^{-1} |T|^{-r+1}.$$

D'après (6) nous obtenons $|Q_{n+1}| \ = \ |Q_n|^q |T|$, ce qui implique

$$(7) \qquad |\theta_q - (P_n/Q_n)^r| \ = \ |Q_n^r|^{-2} |T|^{-r}.$$

Ceci montre que $(P_n/Q_n)^r$ est une réduite de θ_q, et termine la preuve du lemme.

LEMME III.2. *Soient P et Q deux polynômes de $K[T]$, avec $Q \neq 0$, et n un entier positif. Si*

$$(8) \qquad |Q| < |Q_n|^r \ \text{ et } |PQ_n^r - QP_n^r| < \frac{|Q_n|^r}{|Q|}$$

alors P/Q est une réduite de θ_q. De plus, si P et Q sont premiers entre eux et la réduite P/Q est U_k/V_k, alors nous avons

$$(9) \quad |a_{k+1}| \ = \ |PQ_n^r - QP_n^r|^{-1} |Q|^{-1} |Q_n|^r.$$

Preuve . Par (7) et (8), nous avons

$$|\theta_q - (P_n/Q_n)^r| \ = \frac{1}{|Q_n|^{2r}|T|^r} < \frac{1}{|Q_n|^r|Q|} \leq \frac{|PQ_n^r - QP_n^r|}{|Q_n|^r|Q|}$$

vu que $|Q| < |Q_n|^r$ et $(P_n, Q_n) = 1$ implique $PQ_n^r - QP_n^r \neq 0$. D'où

$$|\theta_q - (P_n/Q_n)^r| < |P/Q - (P_n/Q_n)^r|$$

donc

$$|\theta_q - P/Q| \ = \ |\theta_q - (P_n/Q_n)^r + (P_n/Q_n)^r - P/Q| \ = \ |P/Q - (P_n/Q_n)^r|$$

et, par (8),

$$|\theta_q - P/Q| < |Q|^{-2}.$$

Ceci montre que P/Q est une réduite de θ_q. Maintenant si P et Q sont premiers entre eux et $P/Q = U_k/V_k$, nous avons $|Q| = |V_k|$. D'autre part, nous savons que

$$|\theta_q - U_k/V_k| \ = \ |V_k|^{-2} |a_{k+1}|^{-1}.$$

Comme

$$|\theta_q - U_k/V_k| \ = \ |P/Q - (P_n/Q_n)^r|$$

il est clair que l'égalité (9) est vérifiée. Ainsi le lemme est prouvé.

LEMME III.3. *Considérons les éléments de $K(T)$, définis par*

$$\Theta_q(T) = \frac{T^q}{(T^2+1)^r} \quad et \quad \Theta'_q(T) = \frac{T^q}{(T^2-1)^r}$$

Alors nous avons les développements en fraction continue suivants :

$$(10) \quad \Theta_q(T) = [0, T, 2T, 2T, ..., 2T, T] \quad (2T \textit{ est répété } q-1 \textit{ fois})$$

$$(11) \quad \Theta'_q(T) = [0, T, -2T, 2T, ..., -2T, 2T, -T] \quad (-2T, 2T \textit{ est répété } \frac{q-1}{2} \textit{ fois}).$$

Preuve . Soit $(R_k)_{0 \le k \le q+1}$ la suite d'éléments de $K(T)$, définie par:

$$(12) R_0 = 0,\ R_1 = 1,\ R_k = 2TR_{k-1} + R_{k-2} \text{ pour } \quad 2 \le k \le q,\ R_{q+1} = TR_q + R_{q-1}$$

Alors, par la propriété usuelle d'une suite linéaire récurrente, nous avons

$$(12)' \qquad R_k = \frac{1}{2\sqrt{T^2+1}}((T+\sqrt{T^2+1})^k - (T-\sqrt{T^2+1})^k) \quad \text{pour} \quad 1 \le k \le q.$$

Maintenant nous introduisons la suite $(S_k)_{0 \le k \le q+1}$ d'éléments de $K[T]$, définie par

$$(13) S_0 = 1,\ S_1 = T,\ S_k = 2TS_{k-1} + S_{k-2} \text{ for } \quad 2 \le k \le q,\ S_{q+1} = TS_q + S_{q-1}.$$

Donc $(R_k/S_k)_{0 \le k \le q+1}$ sont les réduites de $[0, T, 2T....2T, T]$, et (10) sera établi si nous montrons que

$$(14) \quad R_{q+1} = T^q \quad \text{et} \quad S_{q+1} = (T^2+1)^r$$

D'abord nous prouvons que

$$(13)' \quad S_k = TR_k + R_{k-1}$$

est vérifié pour $1 \le k \le q$. Par récurrence, comme S_k et R_k satisfont la même relation de récurrence, il suffit de voir que $(13)'$ est vérifié pour $k = 1$ et $k = 2$. Ensuite nous prouvons que

$$(15) \quad R_q = (T^2+1)^{r-1} \quad \text{et} \quad S_q = T^q$$

En effet, par $(12)'$, nous avons

$$R_q = \frac{1}{2\sqrt{T^2+1}}((T^q + (\sqrt{T^2+1})^q) - (T^q - (\sqrt{T^2+1})^q)) = (T^2+1)^{r-1}$$

$$R_{q-1} = \frac{1}{2\sqrt{T^2+1}}(\frac{T^q + (\sqrt{T^2+1})^q}{T+\sqrt{T^2+1}} - \frac{T^q - (\sqrt{T^2+1})^q}{T-\sqrt{T^2+1}}) = T^q - T(T^2+1)^{r-1}$$

Alors, avec $(13)'$, ces égalités entraînent $S_q = TR_q + R_{q-1} = T^q$.
De même avec (12), nous obtenons $R_{q+1} = TR_q + R_{q-1} = T^q$. D'autre part nous avons l'identité classique $R_{q+1}S_q - S_{q+1}R_q = -1$. Alors, avec (14) et (15), il vient $S_{q+1}R_q = T^{2q} + 1 = (T^2+1)^q$, et donc $S_{q+1} = (T^2+1)^r$. Ainsi (10) est prouvé.

Maintenant nous montrons que (11) est une conséquence de (10). Soit u une racine carrée de -1, éventuellement dans une extension de K. Nous avons

$$u\Theta_q(uT) = \frac{u^{2r}T^q}{(-T^2+1)^r} = \frac{T^q}{(T^2-1)^r} = \Theta'_q(T).$$

À partir de cette identité et de (10), nous obtenons

$$\Theta'_q(T) = u[0, uT, 2uT, 2uT, ..., 2uT, uT].$$

En utilisant la propriété de la multiplication d'une fraction continue par un scalaire, nous avons

$$\Theta'_q(T) = [0, T, 2u^2T, 2T, ..., 2T, u^2T] = [0, T, -2T, 2T, ..., 2T, -T]$$

et (11) est prouvé.

Nous pouvons remarquer, d'après $(12)'$ et $(13)'$, que le polynôme R_i a une parité opposée à celle de l'entier i, et le polynôme S_i a la même parité que l'entier i. Pour $0 \leq i \leq q+1$, nous introduisons les éléments de $K[T]$, définis par

$$(16) \qquad \begin{cases} R'_i = R_i(uT) \quad \text{et} \quad S'_i(T) = -uS_i(uT) \qquad \text{pour } i \text{ impair} \\ R'_i = uR_i(uT) \quad \text{et} \quad S'_i(T) = S_i(uT) \qquad \text{pour } i \text{ pair.} \end{cases}$$

Comme nous avons $u(R_i/S_i)(uT) = (R'_i/S'_i)(T)$, il est clair, par le même argument que ci-dessus, que R'_i/S'_i sont les réduites de $\Theta'_q(T)$, pour $i = 0, 1, .., q+1$.

Le lemme suivant montre qu'il existe q fonctions rationnelles, à coefficients dans K, $W_i \in K(X)$ pour $i = 1, ..., q$, telles que $P_n^r W_i(Q_n^r)$ est une réduite de θ_q, pour tout $n \geq 0$. Plus précisément, nous avons :

LEMME III.4. *Pour $1 \leq i \leq q$, soient R_i, S_i, R'_i et S'_i les éléments de $K[T]$ introduits ci-dessus. Avec les notations précédentes, pour $n \geq 0$, nous posons*

$$R_{i,n} = P_n^r R_i(Q_n^r) \quad \textit{et} \quad S_{i,n} = S_i(Q_n^r) \qquad \textit{pour } n \textit{ impair,}$$

$$R_{i,n} = P_n^r R'_i(Q_n^r) \quad \textit{et} \quad S_{i,n} = S'_i(Q_n^r) \qquad \textit{pour } n \textit{ pair.}$$

Alors, pour $n \geq 0$, $R_{i,n}/S_{i,n}$ est une réduite de θ_q. De plus $R_{i,n}$ et $S_{i,n}$ sont premiers entre eux, et si $m(i,n)$ est l'entier tel que $U_{m(i,n)}/V_{m(i,n)} = R_{i,n}/S_{i,n}$, alors $a_{m(i,n)+1} = \lambda_{i,n}T^r$, où $\lambda_{i,n}$ est un élément non nul de K.

En outre, pour $n \geq 0$, nous avons :

$$(17) \quad R_{1,n}/S_{1,n} = P_n^r/Q_n^r \quad , \quad R_{q,n}/S_{q,n} = Q_{n+1}^{r-1}P_n^q/P_{n+1}^r$$

et la réduite précedant $R_{1,n}/S_{1,n}$, dans la suite des réduites de θ_q, est $R_{q,n-1}/S_{q,n-1}$ c'est à dire

$$(18) \quad R_{q,n-1}/S_{q,n-1} = U_{m(1,n)-1}/V_{m(1,n)-1} \qquad \textit{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Preuve . Soient n et i des entiers tels que $n \geq 0$ et $1 \leq i \leq q$. Nous allons appliquer le lemme 2 avec $P = R_{i,n}$ et $Q = S_{i,n}$. D'abord, d'après (13) et (16), nous avons $|S_i| = |S'_i| = |T|^i$ donc nous obtenons $|S_{i,n}| = |Q_n|^{ri}$. Alors, par (6), il vient $|Q_n|^i \leq |Q_n|^q < |Q_{n+1}|$. Donc nous avons $|S_{i,n}| < |Q_{n+1}|^r$, et ceci est la première partie de la condition (8). Nous posons $\delta_{i,n} = R_{i,n}Q^r_{n+1} - S_{i,n}P^r_{n+1}$. Pour n impair, nous avons

$\delta_{i,n} = P^r_n R_i(Q^r_n)Q^r_{n+1} - S_i(Q^r_n)P^r_{n+1}$.

Par (6), (14) et comme nous avons $P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = -1$, nous obtenons

$\delta_{i,n} = (Q^{2r}_n + 1)^r R_i(Q^r_n) - S_i(Q^r_n)Q^{qr}_n$

$\delta_{i,n} = S_{q+1}(Q^r_n)R_i(Q^r_n) - S_i(Q^r_n)R_{q+1}(Q^r_n)$

$\delta_{i,n} = \Delta_i(Q^r_n)$, avec $\Delta_i = S_{q+1}R_i - S_iR_{q+1}$.

De la même façon, pour n pair, par (6), (14) et comme nous avons $P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = 1$, nous obtenons

$\delta_{i,n} = (Q^{2r}_n - 1)^r R'_i(Q^r_n) - S'_i(Q^r_n)Q^{qr}_n$.

Nous observons, d'après (14) et (16), que $R'_{q+1} = (-1)^r T^q$ et $S'_{q+1} = (-T^2 + 1)^r$, ainsi nous obtenons

$\delta_{i,n} = (-1)^r \Delta'_i(Q^r_n)$, avec $\Delta'_i = S'_{q+1}R'_i - S'_iR'_{q+1}$.

D'autre part nous avons $|R_{q+1}/S_{q+1} - R_i/S_i| = 1/|S_{i+1}S_i|$ et par conséquent

$$|\Delta_i| = |S_{q+1}S_i|\,|R_{q+1}/S_{q+1} - R_i/S_i| = |S_{q+1}|/|S_{i+1}|.$$

Par (12) et (13), nous voyons que $|S_i| = |T|^i$ et $|R_i| = |T|^{i-1}$, ceci entraîne $|\Delta_i| = |T|^{q-i}$. De la même façon, par (16) $|S_i| = |S'_i|$, $|R_i| = |R'_i|$, d'où $|\Delta'_i| = |T|^{q-i}$. Comme $|S_{i,n}| = |Q_n|^{ri}$, et par (6) $|Q_{n+1}| > |Q_n|^q$, nous avons enfin

$$|\delta_{i,n}| = |Q_n|^{r(q-i)} < |Q_{n+1}|^r/|S_{i,n}|$$

ce qui est la deuxième partie de la condition (8), et ainsi par le lemme 2, $R_{i,n}/S_{i,n}$ est une réduite de θ_q, pour $n \geq 0$ et $1 \leq i \leq q$.

Maintenant nous voulons prouver que $R_{i,n}$ et $S_{i,n}$ sont premiers entre eux. D'abord nous montrons que Δ_i et S_i sont premiers entre eux (de même pour Δ'_i et S'_i). Nous avons $\Delta_i + S_iT^q = (T^2+1)^r R_i$ (ou $\Delta'_i + (-1)^r S'_iT^q = (-T^2+1)^r R'_i$). Alors, comme R_i et S_i sont premiers entre eux (ou R'_i et S'_i), nous voyons que si A est un diviseur commun premier de Δ_i et S_i (ou de Δ'_i et S'_i) , alors il divise $T^2 + 1$ (ou $T^2 - 1$). Maintenant si S_i a un tel diviseur alors nous avons $S_i(u) = 0$ ou $S_i(-u) = 0$, où u est une racine carrée de -1. A partir de $(13)'$, nous pouvons écrire

$$S_0(u) = 1 \qquad S_1(u) = u \qquad S_i(u) = 2uS_{i-1}(u) + S_{i-2}(u) \quad \text{pour} 1 \leq i \leq q$$

et ceci implique $S_i(u) = u^i$ pour $1 \leq i \leq q$. Comme S_i est alternativement un polynôme impair ou pair, nous avons aussi $S_i(-u) = (-1)^i S_i(u)$. Par conséquent $S_i(\pm u) \neq 0$, et il s'en suit que Δ_i et S_i sont premiers entre eux. Pour Δ'_i et S'_i, on peut faire le même raisonement. Dans ce cas il faut voir que $S'_i(\pm 1) \neq 0$, et ceci découle de (16), et du fait que $S_i(\pm u) \neq 0$. Ainsi il existe des polynômes E et F de $K[T]$ tels que

$$E\Delta_i + FS_i = 1 \quad \text{d'où} \quad E(Q_n^r)\Delta_i(Q_n^r) + F(Q_n^r)S_i(Q_n^r) = 1$$

Alors $\Delta_i(Q_n^r)$ et $S_i(Q_n^r)$ sont premiers entre eux (de même pour $\Delta_i'(Q_n^r)$ et $S_i'(Q_n^r)$). Maintenant revenons à $R_{i,n}$ et $S_{i,n}$. Si B est un diviseur commun à eux deux, alors B divise $R_{i,n}Q_{n+1}^r - S_{i,n}P_{n+1}^r = \Delta_i(Q_n^r)$ et $S_{i,n} = S_i(Q_n^r)$ (ou $(-1)^r\Delta_i'(Q_n^r)$ et $S_i'(Q_n^r)$), et donc divise 1. Ainsi nous avons établi le résultat souhaité.
Alors nous pouvons appliquer la fin du lemme 2. Par (9), nous obtenons

$$|a_{m(i,n)+1}| = |\delta_{i,n}|^{-1}|S_{i,n}|^{-1}|Q_{n+1}|^r = |Q_n|^{-r(q-i)}|Q_n|^{-ri}|Q_{n+1}|^r = |T|^r$$

car $|Q_{n+1}| = |T|\ |Q_n|^q$. Alors le lemme 1 entraîne $a_{m(i,n)+1} = \lambda_{i,n}T^r$, où $\lambda_{i,n}$ est un élément non nul de K.

Maintenant nous explicitons $R_{1,n}/S_{1,n}$ et $R_{q,n}/S_{q,n}$. Comme $R_1 = R_1' = 1$ et $S_1 = S_1' = T$, la définition de $R_{1,n}$ et $S_{1,n}$ donne immédiatement la première partie de (17). Par (15), nous avons $(R_q/S_q)(T) = (T^2+1)^{r-1}/T^q$. Par (15) et (16), nous obtenons $(R_q'/S_q')(T) = (T^2-1)^{r-1}/T^q$. Par conséquent $R_{q,n}/S_{q,n} = P_n^r(Q_n^{2r} + (-1)^{n-1})^{r-1}/Q_n^{rq}$. De plus, par (6), nous avons $Q_n^q = P_{n+1}$ et donc $Q_n^{q+1} - (-1)^n = P_nQ_{n+1}$. Ainsi $R_{q,n}/S_{q,n} = P_n^{2r-1}Q_{n+1}^{r-1}/P_{n+1}^r$, et (17) est établi. Enfin, nous avons

$$|S_{q,n}| = |Q_n|^{qr} = (|Q_{n+1}|/|T|)^r = |S_{1,n+1}|/|T|^r.$$

Comme les dénominateurs des réduites sont des polynômes de $K[T^r]$, $R_{q,n}/S_{q,n}$ doit être la réduite précédant $R_{1,n+1}/S_{1,n+1}$. Ceci termine la démonstration du lemme 4.

Nous pouvons maintenant décrire, en partie, la structure de la suite des quotients partiels du développement en fraction continue de θ_q. Nous introduisons $\Omega_{i,n}$, pour $n \geq 0$ et pour $1 \leq i \leq q$, comme étant la suite des quotients partiels définissant la réduite $R_{i,n}/S_{i,n}$. Ainsi

$$R_{i,n}/S_{i,n} = [0, \Omega_{i,n}] \quad \text{et} \quad \Omega_{i,n} = a_1, \ldots\ldots, a_{m(i,n)} \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } 1 \leq i \leq q.$$

Nous pouvons décrire $\Omega_{1,1}$ and $\Omega_{1,2}$. Nous avons $R_{1,n}/S_{1,n} = (P_n/Q_n)^r$, d'aprés (17). Puis $R_{1,1}/S_{1,1} = (P_1/Q_1)^r = 1/T^r$, par (6), donc $\Omega_{1,1} = a_1 = T^r$. D'autre part , avec (6) et les notations du lemme 3, nous avons

$$R_{1,2}/S_{1,2} = (P_2/Q_2)^r = T^{qr}/(T^{q+1}+1)^r = \Theta_q(T^r).$$

Par conséquent l'égalité (10) entraîne

$$(19) \quad \Omega_{1,2} = T^r, 2T^r, 2T^r, \ldots., 2T^r, T^r \quad (q+1 \text{ termes}).$$

Observons que, pour $n \geq 1$, nous avons $m(1,n) < m(2,n) < \ldots. < m(q,n)$. En effet $|S_{i+1,n}| > |S_{i,n}|$, car $|S_{i,n}| = |Q_n|^{ir}$ et $|Q_n| > 1$, pour $n \geq 1$. Alors, d'aprés les résultats obtenus dans le lemme 4, nous pouvons écrire :

$\Omega_{2,n} = \Omega_{1,n}, \lambda_{1,n}T^r, \Lambda_{2,n} \qquad \Omega_{3,n} = \Omega_{1,n}, \lambda_{1,n}T^r, \Lambda_{2,n}, \lambda_{2,n}T^r, \Lambda_{3,n} \qquad .....$

$\Omega_{q,n} = \Omega_{1,n}, \lambda_{1,n}T^r, \Lambda_{2,n}, ..., \lambda_{q-1,n}T^r, \Lambda_{q,n}$

et enfin, comme $a_{m(1,n+1)} = a_{m(q,n)+1} = \lambda_{q,n}T^r$ d'après (18), nous pouvons écrire, pour $n \geq 1$,

$$(19)' \quad \Omega_{1,n+1} = \Omega_{1,n}, \lambda_{1,n}T^r, \Lambda_{2,n}, ..., \lambda_{q-1,n}T^r, \Lambda_{q,n}, \lambda_{q,n}T^r$$

où les $\lambda_{i,n} \in K^*$ et les $\Lambda_{i,n}$ sont des suites finies d'éléments de $K[T]$. (Pour $n = 1$, les suites $\Lambda_{i,1}$ sont vides.)

Nous allons voir que cette description peut être améliorée.. Auparavant nous devons introduire les notations suivantes.

Si $\Omega = x_1, x_2, ..., x_k$ est une suite de polynômes, nous notons $\widetilde{\Omega}$ la suite obtenue en inversant l'ordre des termes de Ω, i.e. $\widetilde{\Omega} = x_k, x_{k-1}, ..., x_1$. De plus, si ϵ est un élément non nul de K, nous écrivons $\epsilon\Omega$ pour $\epsilon x_1, \epsilon^{-1}x_2, ..., \epsilon^{(-1)^{k-1}}x_k$. Observons que si $[\Omega]$ représente l'élément de $K(T)$ qui a pour développement en fraction continue Ω, nous avons $\epsilon[\Omega] = [\epsilon\Omega]$.
Nous pouvons maintenant prouver le résultat suivant :

LEMME III.5. *Il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ d'éléments non nuls de K, telle que*

$$(20) \quad a_{m(1,n)-k} = \epsilon_n^{(-1)^k} a_{k+1} \qquad \textit{pour tout } (k,n) \textit{ avec } 0 \leq k \leq m(1,n) - 1 \textit{ et } n \geq 1$$

De plus nous avons pour $n \geq 2$

$$(21) \qquad \begin{cases} \Lambda_{q,n}\lambda_{q,n}T^r = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\widetilde{\Omega}_{1,n} & \Lambda_{q-i,n} = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\widetilde{\Lambda}_{i+1,n} \qquad \textit{for } 1 \leq i \leq r-2, \\ \qquad \lambda_{q,n} = \epsilon_{n+1}^{\pm 1} & \lambda_{q-i,n} = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\lambda_{i,n} \qquad \textit{for } 1 \leq i \leq r-1. \end{cases}$$

Preuve . D'après (17) et (18), nous pouvons écrire

$$(22) \qquad U_{m(1,n)} = \epsilon'_n P_n^r \qquad V_{m(1,n)} = \epsilon'_n Q_n^r$$

et

$$(23) \qquad U_{m(1,n)-1} = \epsilon''_n P_{n-1}^q Q_n^{r-1} \qquad V_{m(1,n)-1} = \epsilon''_n P_n^r$$

où ϵ'_n et ϵ''_n sont des éléments non nuls de K. Nous posons $\epsilon_n = \epsilon'_n/\epsilon''_n$.
D'après la définition de V_k, pour tout $k \geq 1$, nous avons $V_k/V_{k-1} = [a_k, a_{k-1}, ..., a_1]$, donc nous pouvons écrire $V_{m(1,n)}/V_{m(1,n)-1} = [a_{m(1,n)}, a_{m(1,n)-1}, ..., a_1]$.
d'autre part, par (22) et (23), nous avons

$$\frac{V_{m(1,n)}}{V_{m(1,n)-1}} = \epsilon_n . \frac{V_{m(1,n)}}{U_{m(1,n)}} = \frac{\epsilon_n}{[0, a_1, ...a_{m(1,n)}]} = \epsilon_n[a_1, ..., a_{m(1,n)}]$$

par conséquent

$$[a_{m(1,n)}, ..., a_1] = \epsilon_n[a_1, ..., a_{m(1,n)}] = [\epsilon_n a_1, ..., \epsilon_n^{(-1)^{i-1}} a_i, ..., \epsilon_n^{(-1)^{m(1,n)-1}} a_{m(1,n)}]$$

Ceci entraîne (20) et se résume par $\widetilde{\Omega}_{1,n} = \epsilon_n \Omega_{1,n}$.

Pour $n \geq 1$, nous posons $\Omega_{1,n} = a_1, \Lambda_{1,n} = T^r, \Lambda_{1,n}$. Ainsi, pour $n \geq 1$, $(19)'$ s'écrit

$$(24) \quad \Omega_{1,n+1} = T^r, \Lambda_{1,n}, \lambda_{1,n}T^r, \Lambda_{2,n}, \lambda_{2,n}T^r, \ldots.., \Lambda_{q,n}, \lambda_{q,n}T^r.$$

Pour toute suite de polynômes non nuls, nous définissons son degré comme étant la somme des degrés de ses termes. Nous avons deg $\Omega_{1,n} =$ deg $S_{1,n} = r$deg Q_n et, pour $2 \leq i \leq q$, deg $S_{i,n} -$ deg $S_{i-1,n} = r$deg Q_n. D'après (6), nous avons deg $Q_n = q$deg $Q_{n-1} + 1$ et deg $Q_0 = 0$, il en résulte deg $Q_n = (q^n - 1)/(q-1)$. Posons $\omega_n = rq$deg Q_{n-1}, alors nous obtenons deg $\Omega_{1,n} = \omega_n + r$ et deg $\Lambda_{1,n} = \omega_n$. Aussi, pour $2 \leq i \leq q$, deg $\Lambda_{i,n} = \omega_n$. Si nous écrivons la suite des degrés des composantes à droite de (24), nous obtenons la suite, de $2q+1$ termes : $r, \omega_n, r, \omega_n, \ldots.., r, \omega_n, r$. Comme cette suite est un palindrome et $\widetilde{\Omega}_{1,n+1} = \epsilon_{n+1}\Omega_{1,n+1}$, la relation (20) entre deux termes symétriques par rapport au centre de $\Omega_{1,n+1}$ se transmet entre deux blocs symétriques par rapport à ce centre. Alors il est clair que

$$\Lambda_{q,n}\lambda_{q,n}T^r = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\widetilde{\Omega}_{1,n}, \Lambda_{q-1,n} = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\widetilde{\Lambda}_{2,n}, \ldots., \Lambda_{r+1,n} = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\widetilde{\Lambda}_{r-1,n}$$

et aussi

$$\lambda_{q,n}T^r = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}T^r, \lambda_{q-1,n}T^r = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\lambda_{1,n}T^r, \ldots\ldots., \lambda_{r,n}T^r = \epsilon_{n+1}^{\pm 1}\lambda_{r-1,n}T^r.$$

Ceci est (21), ainsi le lemme 5 est prouvé.
Nous pouvons remarquer que si $\epsilon_n = 1$ alors la suite $\Omega_{1,n}$ est un palindrome. Ceci est, de fait, le cas si $m(1,n)$ est impair : En effet si $m(1,n) = 2l+1$, alors (20) implique $a_{l+1} = \epsilon_n^{(-1)^l} a_{l+1}$ et par conséquent $\epsilon_n = 1$. Remarquons enfin que nous avons évidemment $\epsilon_1 = 1$ et, comme $\Omega_{1,2}$ est un palindrome d'aprés (19), nous avons aussi $\epsilon_2 = 1$.

Comme nous l'avons indiqué au début de ce paragraphe, dans le cas général, nous n'avons pas obtenu une description complète du développement en fraction continue de θ_q (Voir la remarque suivant le théorème III.1. ci dessous). Le cas $q = 3$, première valeur de q possible, est très particulier.

Si $q = 3$ alors $K = \mathbb{F}_3$ et $r = 2$. Dans ce cas nous avons $\epsilon^{\pm 1} = \epsilon$ si $\epsilon \in K^*$. Alors (20) devient

$$(20)' \quad a_{m(1,n)-k} = \epsilon_n a_{k+1} \quad \text{pour} \;\; 0 \leq k \leq m(1,n)-1 \text{ et } \;\; n \geq 1.$$

D'aprés le lemme 5, (24) devient

$$(24)' \quad \Omega_{1,n+1} = \Omega_{1,n}, \lambda_{1,n}T^2, \Lambda_{2,n}, \epsilon_{n+1}\lambda_{1,n}T^2, \epsilon_{n+1}\widetilde{\Omega}_{1,n}.$$

Dans ce cas, nous allons voir que le développement en fraction continue de θ_3 est complètement explicité. Nous prouvons le résultat dejà obtenu par M. Buck et D. Robbins dans [3].

THÉORÈME III.1. *Soit θ_3^* la solution, dans $\mathbb{F}_3((T^{-1}))$, de l'équation*

$$x = (1/T)(1-x^2)^2.$$

Soit $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ la suite de suites finies d'éléments de $\mathbb{F}_3[T]$, définie par

$$\Omega_1 = T \quad \Omega_2 = T, 2T, 2T, T \quad \text{et} \quad \Omega_{n+1} = \Omega_n, 2T, \Omega_{n-1}^{(3)}, 2T, \Omega_n \quad \text{pour } n \geq 2$$

avec $\Omega_{n-1}^{(3)}$ représentant la suite obtenue en élevant au cube chaque terme de Ω_{n-1}. Soit Ω_∞ la suite commençant par Ω_n, pour tout n.
Alors le développement en fraction continue de θ_3^* est donné par

$$\theta_3^* = [0, \Omega_\infty].$$

Preuve . Compte tenu du lien entre θ_3 et θ_3^* et avec les résultats et notations antérieurs, il suffit de prouver que l'identité $(24)'$ s'écrit

$$(25) \qquad \Omega_{1,n+1} = \Omega_{1,n}, 2T^2, \Omega_{1,n-1}^{(3)}, 2T^2, \Omega_{1,n} \qquad \text{pour } n \geq 2.$$

Soit n un entier, avec $n \geq 2$. D'abord nous allons déterminer $\Lambda_{2,n}$. Nous avons $U_{m(1,n)}/V_{m(1,n)} = [0, \Omega_{1,n}]$, $U_{m(1,n)+1}/V_{m(1,n)+1} = [0, \Omega_{1,n}, \lambda_{1,n}T^2]$ et $U_{m(2,n)}/V_{m(2,n)} = [0, \Omega_{1,n}, \lambda_{1,n}T^2, \Lambda_{2,n}]$. Si nous notons $x_{2,n}$, l'élément de $K(T)$ défini par $[\Lambda_{2,n}]$, alors il est un fait classique que nous avons

$$(26) \quad \frac{U_{m(2,n)}}{V_{m(2,n)}} = \frac{x_{2,n}U_{m(1,n)+1} + U_{m(1,n)}}{x_{2,n}V_{m(1,n)+1} + V_{m(1,n)}}.$$

Nous savons que $U_{m(2,n)}/V_{m(2,n)} = R_{2,n}/S_{2,n}$. Nous avons $R_2(T) = 2T$, $S_2(T) = 2T^2 + 1$ et aussi $R_2'(T) = uR_2(uT) = -2T$, $S_2'(T) = S_2(uT) = -2T^2 + 1$. Il en résulte que $R_{2,n}/S_{2,n} = P_n^2Q_n^2/(Q_n^4 + (-1)^n)$. Nous posons

$$(27) \quad P' = P_n^2Q_n^2 \quad \text{et} \quad Q' = Q_n^4 + (-1)^n.$$

Alors la formule (26) peut être inversée, et par (22), nous obtenons

$$(26)' \quad x_{2,n} = \epsilon_n' \frac{P_n^2Q' - Q_n^2P'}{V_{m(1,n)+1}P' - U_{m(1,n)+1}Q'}.$$

Il faut déterminer $U_{m(1,n)+1}/V_{m(1,n)+1}$. Nous utilisons le fait que $R_{3,n-1}/S_{3,n-1}$ et $R_{1,n}/S_{1,n}$ sont, d'aprés le lemme 4, les deux réduites precédant celle-ci.

Ainsi, nous considérons les polynômes P et Q de $K[T]$, définis par

$$(28) \qquad P = 2T^2P_n^2 + P_{n-1}^3Q_n \quad \text{et} \quad Q = 2T^2Q_n^2 + P_n^2.$$

Nous appliquons le lemme 2, pour montrer que P/Q est une réduite de θ_3. D'abord nous avons $\deg Q = 2\deg Q_n + 2$ et donc $Q \neq 0$. D'après (28) et (6), nous avons $PQ_n^2 - QP_n^2 = P_{n-1}^3Q_n^3 - P_n^4 = P_{n-1}^3Q_n^3 - P_n^3Q_{n-1}^3 = (-1)^n$, ainsi $(P,Q) = 1$. Comme $2\deg Q_n + 2 < 2\deg Q_{n+1}$ pour $n \geq 2$, la première partie de la condition (8), i.e. $|Q| < |Q_{n+1}|^2$, est satisfaite. Montrons que $|PQ_{n+1}^2 - QP_{n+1}^2| < |Q_{n+1}|^2/|Q|$, l'est aussi. Nous posons

$$X_1 = Q_{n+1}^2 P_n^2 - Q_n^2 P_{n+1}^2 \quad \text{et} \quad X_2 = P_{n-1}^3 Q_n Q_{n+1}^2 - P_n^2 P_{n+1}^2.$$

D'après (28), il vient $PQ_{n+1}^2 - QP_{n+1}^2 = 2T^2 X_1 + X_2$. Comme $P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n$, et avec (6), nous avons

$X_1 = (-1)^{n+1}(2Q_n P_{n+1} + (-1)^{n+1}) = (-1)^{n+1}(2Q_n^4 + (-1)^{n+1}) = (-1)^n Q_n^4 + 1$

puis

$X_2 = Q_{n+1}^2 P_{n-1}^3 Q_n - P_{n+1}^2 P_n^2 = (Q_{n+1}/Q_n)^2((-1)^n + P_n^4) - P_{n+1}^2 P_n^2$

$X_2 = (Q_{n+1}/Q_n)^2(-1)^n + (P_n/Q_n)^2 X_1$

$X_2 = ((Q_{n+1}/Q_n)^2 + (P_n Q_n)^2)(-1)^n + (P_n/Q_n)^2.$

Nous posons $X = PQ_{n+1}^2 - QP_{n+1}^2$. Comme $X = 2T^2 X_1 + X_2$, nous avons

$X = 2T^2 + (-1)^n(2T^2 Q_n^4 + (Q_{n+1}/Q_n)^2 + (P_n Q_n)^2 + (-1)^n (P_n/Q_n)^2)$

$X = 2T^2 + (-1)^n(2T^2 Q_n^4 + (TQ_n^2 + P_n^3/Q_n)^2 + (P_n/Q_n)^2(Q_n^4 + (-1)^n))$

Comme $Q_n^4 - TP_n Q_n^3 - P_n^4 = P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n$, il vient

$X = 2T^2 + (-1)^n(2TQ_n P_n^3 + P_n^6/Q_n^2 + (P_n/Q_n)^2(2Q_n^4 - TP_n Q_n^3 - P_n^4))$

$X - 2T^2 = (-1)^n(TQ_n P_n^3 + 2P_n^2 Q_n^2) = (-1)^{n+1} P_n^2 Q_n P_{n-1}^3.$

Vu que, pour $n \geq 2$, $|P_{n-1}^3| < |Q_n|$ et $|P_n| < |Q_n|$, cette égalité implique

$$|X| < |Q_n|^4 = \frac{|Q_{n+1}|^2}{|Q|}$$

donc (8) est satisfait. Par conséquent P/Q est une réduite de θ_3, et, comme deg Q =deg $V_{m(1,n)} + 2$ et $\theta_3 \in \mathbb{F}_3((T^{-2}))$, il s'agit de celle qui suit $U_{m(1,n)}/V_{m(1,n)}$. Nous pouvons donc écrire

$$(29) \qquad U_{m(1,n)+1} = \eta_n P \quad \text{and} \quad V_{m(1,n)+1} = \eta_n Q$$

où η_n est un élément inversible de $\mathbb{F}_3$. Par (22), (23), (28), et $\epsilon^{-1} = \epsilon$ pour $\epsilon \in \mathbb{F}_3^*$, la première égalité de (29) peut s'écrire

$$a_{m(1,n)+1} U_{m(1,n)} + U_{m(1,n)-1} = \eta_n \epsilon_n' 2T^2 U_{m(1,n)} + \eta_n \epsilon_n'' U_{m(1,n)-1}.$$

Comme nous avons deg $U_{m(1,n)}$ >deg $U_{m(1,n)-1}$, il en résulte que $a_{m(1,n)+1} = \eta_n \epsilon_n' 2T^2$ et $\eta_n \epsilon_n'' = 1$, i.e. $\eta_n = \epsilon_n''$. Alors, avec $\epsilon_n' \epsilon_n'' = \epsilon_n$, nous obtenons

$$(30) \qquad a_{m(1,n)+1} = \epsilon_n 2T^2.$$

Maintenant revenons à l'égalité $(26)'$. Par (29), avec $\eta_n = \epsilon_n''$ et $\epsilon_n' \epsilon_n'' = \epsilon_n$, $(26)'$ implique

$$(31) \qquad x_{2,n} = \epsilon_n \frac{P_n^2 Q' - Q_n^2 P'}{QP' - PQ'}.$$

Ceci nous permet de calculer $x_{2,n}$. Par (27) et (6),

$P_n^2Q' - Q_n^2P' = P_n^2(Q_n^4 + (-1)^n) - Q_n^2P_n^2Q_n^2 = (-1)^nP_n^2 = (-1)^nQ_{n-1}^6.$

Par (27), (28), et (6),

$QP' - PQ' = P_n^2Q_n^2(2T^2Q_n^2 + P_n^2) - (Q_n^4 + (-1)^n)(2T^2P_n^2 + P_{n-1}^3Q_n)$

$QP' - PQ' = P_n^4Q_n^2 - Q_n^5P_{n-1}^3 - (-1)^n(2T^2P_n^2 + P_{n-1}^3Q_n)$

$QP' - PQ' = Q_n^2(P_nQ_{n-1} - Q_nP_{n-1})^3 + (-1)^n(T^2P_n^2 - Q_n^2 + TQ_nP_n)$

$QP' - PQ' = (-1)^n(T^2P_n^2 + Q_n^2 + TQ_nP_n)$

$QP' - PQ' = (-1)^n(Q_n - TP_n)^2 = (-1)^nP_{n-1}^6$

Alors (31) entraîne

$$(32) \quad x_{2,n} = \epsilon_n(Q_{n-1}/P_{n-1})^6.$$

D'autre part nous avons

$$[a_1, ..., a_{m(1,n-1)}] = 1/[0, a_1, ..., a_{m(1,n-1)}] = 1/(P_{n-1}/Q_{n-1})^2 = (Q_{n-1}/P_{n-1})^2$$

et, comme $K = \mathbb{F}_3$, il vient

$$\epsilon_n(Q_{n-1}/P_{n-1})^6 = [\epsilon_n a_1^3, ..., \epsilon_n a_{m(1,n-1)}^3].$$

Donc, d'après (32) et $x_{2,n} = [\Lambda_{2,n}]$, nous obtenons

$$(33) \quad \Lambda_{2,n} = \epsilon_n a_1^3, ..., \epsilon_n a_{m(1,n-1)}^3.$$

D'après (30) et (33), nous pouvons écrire $(24)'$ de la façon suivante

$$(34) \quad \Omega_{1,n+1} = \Omega_{1,n}, \epsilon_n 2T^2, \epsilon_n a_1^3, ..., \epsilon_n a_{m(1,n-1)}^3, \epsilon_{n+1}\epsilon_n 2T^2, \epsilon_{n+1}\widetilde{\Omega}_{1,n}$$

Alors le lemme 5 et la formule $(20)'$ montrent que nous avons à la fois $\epsilon_n a_{m(1,n-1)}^3 = \epsilon_{n+1}\epsilon_n a_1^3$, c'est-à-dire $a_{m(1,n-1)} = \epsilon_{n+1}a_1$ et $a_{m(1,n-1)} = \epsilon_{n-1}a_1$. Il s'en suit que $\epsilon_{n+1} = \epsilon_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Comme $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 1$, il en résulte que $\epsilon_n = 1$ pour tout $n \geq 1$. Finallement, d'après $(20)'$, la suite $\Omega_{1,n}$ est un palindrome pour tout $n \geq 1$, et donc $\widetilde{\Omega}_{1,n} = \Omega_{1,n}$. Ainsi (34) devient (25) pour $n \geq 2$, et le théorème est prouvé.

Remarque. Nous avons observé le début du développement en fraction continue de θ_q, à l'aide de l'ordinateur, pour $q \leq 27$. Dans tous les cas et pour les valeurs de n que nous avons pu atteindre, nous avons

$$\epsilon_n = 1, \quad \lambda_{q,n} = 1, \quad \lambda_{i,n} = 2 \quad \text{pour } 1 \leq i < q \quad \text{et} \quad \Lambda_{r,n} = \Lambda_{1,n-1}^{(q)}$$

comme cela est le cas pour $q = 3$. Ainsi, pour $q > 3$, nous pouvons conjecturer que $(19)'$ devient

$$\Omega_{1,n+1} = \Omega_{1,n}, 2T^r, \Lambda_{2,n}, ..., \Lambda_{r-1,n}, 2T^r, \Omega_{1,n-1}^{(q)}, 2T^r, \widetilde{\Lambda}_{r-1,n}, ..., \widetilde{\Lambda}_{2,n}, 2T^r, \Omega_{1,n}$$

ou encore

$$(C) \qquad \Omega_{1,n+1} = \Omega_{1,n}, J_{n+1}(q), \Omega^{(q)}_{1,n-1}, \widetilde{J_{n+1}(q)}, \Omega_{1,n}$$

où $J_{n+1}(q) = 2T^r, \Lambda_{2,n}, ..., \Lambda_{r-1,n}, 2T^r$ pour $n \geq 2$. Il reste à décrire, si possible, la structure de la suite $(J_n(q))_{n\geq 2}$, dont la complexité augmente avec q. Nous n'avons pas pu faire de conjectures à ce sujet, à partir des données obtenues par ordinateur. (Voir la remarque suivant le théorème III.2.)

La connaissance, par le théorème III.1, du développement en fraction continue de θ_3^*, nous permet d'en déduire ses propriétés d'approximation par les rationnels. La "particularité" de cet élément est de se comporter, du point de vue de l'approximation rationnelle, comme "l'immense majorité" des éléments algébriques de $K((T^{-1}))$: un exposant d'approximation égal à 1 et une suite de quotients partiels non bornée. Bien que ce cas soit apparemment et statistiquement le plus répandu, il ne semble pas facile à mettre en évidence sans la connaissance complète du développement en fraction continue. Observons que cet exemple semble être le premier élément algébrique pour lequel on a pu prouver que l'exposant d'approximation est égal à 1, hormis les cas où les quotients partiels sont bornés. Nous avons donc le résultat suivant :

THÉORÈME III.2. *Soit θ_3^* la solution, dans $\mathbb{F}_3((T^{-1}))$, de l'équation*

$$x = (1/T)(1-x^2)^2$$

alors nous avons $\nu(\theta_3^*) = 1$ et $B(\theta_3^*, 1) = 0$.

Plus précisémment, il existe des constantes réelles explicites λ_1 et λ_2 telles que pour certains rationnels P/Q avec $|Q|$ arbitrairement grand, nous avons

$$(35) \quad |\theta_3^* - P/Q| \leq |Q|^{-(2+\lambda_1/\sqrt{\deg\ Q}\ )}$$

et, pour tous les rationnels P/Q avec $|Q|$ suffisamment grand , nous avons

$$(36) \quad |\theta_3^* - P/Q| \geq |Q|^{-(2+\lambda_2/\sqrt{\deg\ Q}\ )}.$$

(On peut prendre $\lambda_1 = 2/\sqrt(3)$ et $\lambda_2 > 2/\sqrt(3)$.)

Preuve . Soit α un élément irratinnel de $K((T^{-1}))$, dont le développement en fraction continue est donné par $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ où $a_k \in K[T]$ pour $k \geq 0$ et deg $a_k > 0$ pour $k > 0$. Pour $k > 0$, nous posons

$$d_k = \deg\ a_k \qquad P_k/Q_k = [a_0, ..., a_k]$$

et pour $k > 1$,

$$v_k = d_k/\deg\ Q_{k-1} = d_k/(\sum_{0<i<k} d_i).$$

Comme $(P_k/Q_k)_{k\geq 0}$ est la suite des réduites de α, nous avons

$$|\alpha - P_k/Q_k| \;=\; |Q_kQ_{k+1}|^{-2} \;=\; |a_{k+1}|^{-1}|Q_k|^{-2} \;=\; |Q_k|^{-(2+v_{k+1})}.$$

Rappelons que $\nu(\alpha) = 1$, est équivalent à :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante réelle positive C, dépendant de α et de ϵ, telle que, pour tout $P/Q \in K(T)$,

$$|\alpha - P/Q| \geq C|Q|^{-(2+\epsilon)}$$

et aussi $B(\alpha, 1) \neq 0$ est équivalent à :
Il existe une constante réelle positive C, dépendant de α, telle que, pour tout $P/Q \in K(T)$,

$$|\alpha - P/Q| \geq C|Q|^{-2}.$$

Nous pouvons observer que, du fait que les rationnels P_k/Q_k sont les meilleures approximations de α, nous avons $\nu(\alpha) = 1$, si et seulement si $\limsup_{k\geq 1} v_k = 0$, et aussi $B(\alpha, 1) \neq 0$ si et seulement si la suite $(d_k)_{k\geq 0}$ est bornée.
Il est clair qu'il suffit, pour établir le théorème, de démontrer les inégalités (35) et (36).

Nous partons de la suite des quotients partiels du développement en fraction continue de θ_3^*, telle qu'elle est décrite dans le théorème III.1. Il résulte de la définition par récurrence de la suite $(\Omega_n)_{n\geq 0}$ que tous les quotients partiels sont des monômes et tous ont une puissance de 3 comme degré. Nous introduisons, pour chaque $n \geq 1$, la suite Ω_n^* des degrés des éléments de Ω_n. Nous obtenons

$$\Omega_1^* = 1, \qquad \Omega_2^* = 1111, \qquad \Omega_3^* = 11111311111$$

A partir de la relation de récurrence définissant $(\Omega_n)_{n\geq 1}$, nous voyons, par récurence sur k, que

$$\sup \Omega_{2k+2}^* = \sup \Omega_{2k+1}^* = 3^k \quad \text{ pour } k \geq 0$$

il s'en suit que, pour $k \geq 0$, $2k+1$ est le plus petit entier n tel que 3^k appartient à Ω_n^*.
D'autre part cette même relation de récurrence montre, par induction sur k, que Ω_{2k+1}^* a un nombre impair de termes, avec 3^k comme terme central et aussi la suite Ω_{2k+1}^* est réversible. Pour $i \geq 1$, nous définissons $k_i = \inf\{k \geq 1/ \quad d_k = 3^i\}$. Alors tout cela entraîne

$$(37) \qquad \sum_{a_k \in \Omega_{2i+1}} d_k = 3^i + 2\sum_{k<k_i} d_k.$$

Maintenant, pour $n \geq 1$, nous posons $D_n = \sum_{a_k\in\Omega_n} d_k$. Alors nous obtenons, à partir de la relation de récurrence définissant $(\Omega_n)_{n\geq 1}$,

$$(38) \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 4, \quad D_{n+1} = 2D_n + 3D_{n-1} + 2 \quad \text{ pour } n \geq 1.$$

Il est facile de voir que la suite $((3^n - 1)/2)_{n\geq 1}$ est celle qui est définie par (38).
(On aurait pu obtenir ce résultat différemment : en effet nous avons $D_n = \deg\, \Omega_n$. En tenant compte du lien entre θ_q et θ_q^*, et de ce qui a été vu au lemme 5, nous avons

$$D_n = (1/r)\deg\, \Omega_{1,n} = (1/r)\deg\, S_{1,n} = \deg\, Q_n = (q^n - 1)/(q - 1)$$

avec $q = 3$.)
Ainsi, si $(U_k/V_k)_{k\geq 0}$ est la suite des réduites de θ_3^*, la relation (37) entraîne, pour $i \geq 1$,

$$\deg\ V_{k_i-1} = \sum_{k<k_i} d_k = (D_{2i+1} - 3^i)/2 = (3^{2i+1} - 2.3^i - 1)/4$$

et donc $3^i \geq (2/\sqrt{3})\sqrt{\deg V_{k_i-1}}$, ou encore

$$|T|^{-3^i} \leq |V_{k_i-1}|^{-2/\sqrt{3\deg\ V_{k_i-1}}}.$$

D'autre part, pour $i \geq 1$, nous avons

$$|\theta_3^* - U_{k_i-1}/V_{k_i-1}| = |T|^{-3^i}|V_{k_i-1}|^{-2}$$

nous voyons donc que l'inégalité (35) est satisfaite pour $P/Q = U_{k_i-1}/V_{k_i-1}$ et pour $i \geq 1$, avec $\lambda_1 = 2/\sqrt{3}$.

De plus si U_k/V_k est une réduite de θ_3^*, alors

$$\deg\ V_{k_i-1} \leq \deg V_k < \deg V_{k_{i+1}-1} \quad \text{entraîne} \quad |\theta_3^* - U_k/V_k| \geq |T|^{-3^i}|V_k|^{-2}.$$

Comme $3^i/\sqrt{\deg V_{k_i-1}}$ converge vers $2/\sqrt{3}$, si $\lambda_2 > 2/\sqrt{3}$, alors, pour i assez grand nous avons $3^i < \lambda_2\sqrt{\deg V_{k_i-1}} \leq \lambda_2\sqrt{\deg V_k}$. Par conséquent (36) est satisfaite pour U_k/V_k avec k assez grand et, vu que les réduites sont les meilleures approximations rationnelles, aussi pour tout P/Q avec $|Q|$ assez grand. Ainsi le théorème est démontré.

Remarque. Dans le cas général, avec la conjecture (C), on peut appliquer le même raisonnement et obtenir la même conclusion pour θ_q^*. Pour cela il faut que le degré q^k apparaisse au centre de Ω_{2k+1}^* et soit le plus grand degré de cette suite. Ceci est réalisé si les termes de la suite $J_n(q)$ n'ont pas un trop grand degré en T^r. Notons $j_n'(q)$ le plus grand degré en T^r des termes de $J_n(q)$, alors il faut $j_{2k+1}'(q) < q^k$ et $j_{2k+2}'(q) \leq q^k$, pour $k \geq 0$. (Avec ces hypothèses, le théorème précédent se transpose à θ_q^* en remplaçant la constante $2/\sqrt{3}$ par $\sqrt{2(q-1)/q}$). Observons que si $j_n'(q)$ n'est pas très grand, alors le nombre de termes dans $J_n(q)$ doit croître avec n, vu que le degré de $J_n(q)$ augmente avec n. Dans cette direction nous avons observé les données suivantes concernant $J_n(q)$:

Table donnant le nombre de termes de $J_n(q)$ et (entre parenthèses) le plus haut degré (en T^r) de ces termes.

n/q	5	7	9	11	13
3	5(3)	13(3)	21(5)	35(5)	49(7)
4	22(3)	93(3)	154(9)	413(5)	754(7)
5	99(7)	599(7)	1239(15)		
n/q	17	19	23	25	27
3	85(9)	111(9)	167(11)	193(13)	231(13)
4	1844(9)	2677(9)			

Il existe une autre raison pour penser que $\nu(\theta_q) = \nu(\theta_q^*) = 1$, pour toute puissance q d'un nombre premier impair p, comme cela est le cas pour $q = 3$.
Si nous replaçons l'élément θ_q parmi les éléments α_q^k pour $1 \le k \le r$, nous pouvons voir, comme nous l'avons fait pour θ_q (Lemme 1), que $(P_n/Q_n)^k$ est une réduite de α_q^k , dès que k et p sont premier entre eux. Par conséquent, dans ce cas, l'exposant d'approximation de α_q^k est supérieur ou égal à $(q+1)/k-1$. Il est permis de penser que cet exposant d'approximation est en fait égal à $(q+1)/k-1$ (i.e. il n'existe pas d' approximations de α_q^k essentielement meilleures que $(P_n/Q_n)^k$, en conséquence $\nu(\theta_q) = 1$). Observons que cela est prouvé pour $(q+1)/k$ assez grand, comme application de la proposition III.4 . On peut se demander si dans ce cas là, ou mieux pour une classe assez large d'éléments algébriques de $K((T^{-1}))$, il ne serait pas possible de prouver que l'exposant d'approximation est 1, sans avoir recours au développement en fraction continue.

§3. Le développement en fraction continue de l'exemple de K. Mahler.

En 1949, K. Mahler [7], a introduit l'exemple d'un élément de $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ que nous avons déjà mentionné à plusieurs reprises. Pour cet élément le théorème de Liouville est optimal. Ce dernier paragraphe est consacré à la description du développement en fraction continue de cet élément. Pour ce faire, nous utilisons une méthode inspirée par celle qui a été employée par M. Buck et D. Robbins pour prouver le théorème III.1 (voir [3]). Cependant nous pouvons observer que cet élément étant de type Homographie-Frobenius, son développement en fraction continue pourrait s'obtenir en utilisant la méthode introduite par W. Mills et D. Robbins dans [11].

Nous avons le résultat suivant :

THEOREME III.3. *Soit p un nombre premier, $q = p^s$ avec $s \in \mathbb{N}^*, q > 2$, et $K = \mathbb{F}_p$. Soit α l'élément de $K((T^{-1}))$, defini par*

$$(1) \qquad \alpha = 1/T + \alpha^q \qquad et \qquad |\alpha| = |T|^{-1}.$$

Nous définissons la suite $(\Omega_n)_{n>0}$ de suites finies d'éléments de $K[T]$, par la relation de récurrence suivante :

$$(R_1) \qquad \Omega_1 = T \qquad \Omega_n = \Omega_{n-1}, -T^{(q-2)q^{n-2}}, -\widetilde{\Omega}_{n-1} \qquad pour\ n \ge 2$$

où $\widetilde{\Omega}_n = a_m, a_{m-1}, ..., a_1$ et $-\Omega_n = -a_1, -a_2, ..., -a_m$, si $\Omega_n = a_1, a_2, ..., a_m$. Soit Ω_∞ la suite infinie commençant par Ω_n pour tout $n \ge 1$. Alors le développement en fraction continue de α est $[0; \Omega_\infty]$.

Preuve . Nous allons montrer que si α, élément de $K((T^{-1}))$, a un développement en fraction continue donné par $\alpha = [0; \Omega_\infty] = [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ alors il satisfait (1). Observons que $|\alpha| = |T|^{-1}$, puisque $a_1 = T$.
Considérons la matrice carrée A_k, à coefficients dans $K[T]$, définie pour $k > 0$, par

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{pmatrix}.$$

Nous savons que si $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ sont les suites usuelles de polynômes, telles que $p_n/q_n = [0; a_1, a_2, ..., a_n]$, alors nous avons

$$\prod_{1\leq k\leq n} A_k = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}.$$

Soit $m(n)$ la longueur de la suite Ω_n. Nous pouvons ainsi associer à chaque Ω_n, une matrice carrée M_n, à coefficients dans $K[T]$, définie, pour tout $n > 0$, par

$$(2) \qquad M_n = \prod_{1\leq k\leq m(n)} A_k$$

Nous remarquons, d'après la relation de récurrence (R_1), que chaque a_k est un monôme de $K[T]$, de degré impair, i.e. $a_k(-T) = -a_k(T)$. Ceci entraîne que si $M_n(T)$ est la matrice associée à Ω_n, alors $M_n(-T)$ est celle qui est associée à $-\Omega_n$. D'autre part les matrices A_k étant symétriques, nous voyons que la matrice transposée de M_n, notée $\widetilde{M_n}$, est celle qui est associée à $\widetilde{\Omega}_n$. De sorte que (R_1) devient

$$(R_2) \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \text{ et } M_n(T) = M_{n-1}(T) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -T^{(q-2)q^{n-2}} \end{pmatrix} \widetilde{M}_{n-1}(-T)$$

pour $n \geq 2$.
Maintenant nous allons établir que la matrice M_n a, pour tout $n \geq 1$, la forme suivante :

$$(3) \qquad M_n = \begin{pmatrix} u_n & 1+v_n \\ 1-v_n & w_n \end{pmatrix}$$

où u_n, v_n et w_n sont des polynômes de $K[T]$, avec u_n et w_n impairs, v_n pair.
L'égalité (2) montre que $\det(M_n) = (-1)^{m(n)} = -1$, puisque $m(n)$ est impair : en effet, d'après (R_1) nous avons $m(n) = 2m(n-1) + 1$.
Nous faisons une démonstration par récurrence sur n. Le résultat est vrai si $n = 1$, avec $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ et $w_1 = T$. Supposons le vrai pour n, alors d'après (R_2) et (3) nous avons

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n & 1+v_n \\ 1-v_n & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -T^{(q-2)q^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_n & 1-v_n \\ 1+v_n & -w_n \end{pmatrix}.$$

Par (3) nous obtenons $\det(M_n) = u_n w_n - (1 - v_n^2) = -1$, et donc nous avons

$$(4) \quad u_n w_n + v_n^2 = 0.$$

Par multiplication, et en utilisant (4), nous obtenons :

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} -T^{(q-2)q^{n-1}}(1+v_n)^2 & 1 + w_n T^{(q-2)q^{n-1}}(1+v_n) \\ 1 - w_n T^{(q-2)q^{n-1}}(1+v_n) & w_n^2 T^{(q-2)q^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi M_{n+1} a la forme désirée, avec :

$$(5) \qquad \begin{cases} w_{n+1} = w_n^2 T^{(q-2)q^{n-1}} \\ v_{n+1} = w_n T^{(q-2)q^{n-1}}(1+v_n) \\ u_{n+1} = -T^{(q-2)q^{n-1}}(1+v_n)^2. \end{cases}$$

Ces relations montrent que u_{n+1} et w_{n+1} sont impairs et v_{n+1} est pair. Ainsi les relations (4) et (5) sont satisfaites, par induction, pour tout $n > 0$.

La première égalité de (5) et la condition initiale $w_1 = T$ entraînent

$$(6) \qquad w_n = T^{q^{n-1}} \quad \text{pour } n > 0.$$

Avec (6) la deuxième égalité de (5) devient $v_{n+1} = T^{(q-1)q^{n-1}}(1+v_n)$, ou encore $v_{n+1}T^{-q^n} = T^{-q^{n-1}} + v_n T^{-q^{n-1}}$. Comme $v_1 = 0$, il vient

$$(6') \qquad v_n = T^{q^{n-1}}\Big(\sum_{0 \le k \le n-2} T^{-q^k}\Big) \quad \text{pour } n \ge 2.$$

Nous posons $z_n = \sum_{0 \le k \le n-2} T^{-q^k}$, pour $n \ge 2$, et $z_1 = 0$. Nous avons

$$(7) \qquad v_n = w_n z_n \quad \text{pour } n > 0.$$

De plus, par (4) et (7) nous avons aussi

$$(8) \qquad u_n = -w_n z_n^2 \quad \text{pour } n > 0.$$

En outre, la définition de z_n montre que

$$(9) \qquad z_n^q - z_n + T^{-1} = w_n^{-1} \quad \text{pour } n > 0.$$

Maintenant $u_n/(1-v_n)$ et $(1+v_n)/w_n$ sont donc des réduites de α pour tout $n > 0$, et par conséquent nous avons $\lim u_n/(1-v_n) = \alpha$ et $\lim (1+v_n)/w_n = \alpha$. Si nous posons

$$(10) \qquad \delta_n = u_n/(1-v_n) - (u_n/(1-v_n))^{q-1}(1+v_n)/w_n - T^{-1},$$

alors $\lim \delta_n = \alpha - \alpha^q - T^{-1}$. Maintenant nous allons voir que $\lim \delta_n = 0$, ceci montrera que α satisfait (1).

En effet, par (10), (7) et (8), nous pouvons écrire :

$$\delta_n(1-v_n)^{q-1} = u_n(1-v_n)^{q-2} - u_n^{q-1}(1+v_n)/w_n - T^{-1}(1-v_n)^{q-1}$$
$$\delta_n(1-v_n)^{q-1} = -w_n z_n^2(1-v_n)^{q-2} - w_n^{q-2} z_n^{2q-2}(1+v_n) - T^{-1}(1-v_n)^{q-1}$$
$$\delta_n(1-v_n)^{q-1} = X_n + Y_n$$

avec

$$X_n = -w_n z_n^2\Big(\sum_{0 \le k \le q-3} \binom{q-2}{k}(-v_n)^k\Big) - w_n^{q-2} z_n^{2q-2} - T^{-1}\Big(\sum_{0 \le k \le q-2} \binom{q-1}{k}(-v_n)^k\Big)$$

et

$$Y_n = -w_n z_n^2(-v_n)^{q-2} - w_n^{q-1} z_n^{2q-1} - T^{-1}(-v_n)^{q-1}.$$

Comme $|z_n| = |T|^{-1}$ pour $n > 1$, et par $(6')$, (7) nous avons $1 < |v_n| < |w_n|$, nous voyons que chacun des trois termes de X_n est de valeur absolue inférieure à $|w_n|^{q-2}$. D'où $|X_n| < |w_n|^{q-2}$ pour tout $n > 1$.
D'autre part, par (7) et (9), avec $(-1)^q = -1$ dans $\mathbb{F}_p$, nous obtenons :

$$Y_n = w_n^{q-1} z_n^q - w_n^{q-1} z_n^{2q-1} - T^{-1} w_n^{q-1} z_n^{q-1}$$
$$Y_n = w_n^{q-1} z_n^{q-1}(z_n - z_n^q - T^{-1})$$
$$Y_n = -w_n^{q-2} z_n^{q-1}.$$

Comme $|z_n| = |T|^{-1}$ pour $n > 1$, nous avons $|Y_n| = |w_n|^{q-2}|T|^{1-q}$ pour $n > 1$. Ainsi $|\delta_n(1-v_n)^{q-1}| = |X_n + Y_n| < |w_n|^{q-2}$ pour $n > 1$. Maintenant par (6) et $(6')$ nous avons $|w_n| = |T|^{q^{n-1}}$ et $|1 - v_n| = |T|^{q^{n-1}-1}$. Il s'en suit que $|\delta_n| < |T|^{-q^{n-1}+q-1}$ pour $n > 1$. Ceci implique que $\lim \delta_n = 0$, et termine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[**1**] L. E. BAUM et M. M. SWEET, *Continued Fractions of Algebraic Power Series in Characteristic 2*, Annals of Mathematics **103** (1976), 593–610.

[**2**] L. E. BAUM et M. M. SWEET, *Badly Approximable Power Series in Characteristic 2*, Annals of Mathematics **105** (1977), 573–580.

[**3**] M. W. BUCK et D. P. ROBBINS, *The Continued Fraction Expansion of an Algebraic Power Series Satisfying a Quartic Equation*, Journal of Number Theory **50** (1995), 335–344.

[**4**] B. P. GILL, *An Analogue for Algebraic Functions of the Thue-Siegel Theorem*, Annals of Mathematics **31** (1930), 207–218.

[**5**] E. R. KOLCHIN, *Rational Approximation to Solutions of Algebraic Differential Equations*, Proceedings of the American Mathematical Society **10** (1959), 238–244.

[**6**] A. LASJAUNIAS et B. de MATHAN, *Thue's Theorem in Positive Characteristic*, Journal fűr die reine und angewandte Mathematik **473** (1996), 195–206.

[**7**] K. MAHLER, *On a Theorem of Liouville in Fields of Positive Characteristic*, Canadian Journal of Mathematics **1** (1949), 397–400.

[**8**] E. MAILLET, *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*, (Paris, 1906).

[**9**] B. de MATHAN, *Approximation Exponents for Algebraic Functions*, Acta Arithmetica **60** (1992), 359–370.

[**10**] B. de MATHAN, *Irrationality Measures and Transcendence in Positive Characteristic*, Journal of Number Theory **54** (1995), 93–112.

[**11**] W. H. MILLS et D. P. ROBBINS, *Continued Fractions for Certain Algebraic Power Series*, Journal of Number Theory **23** (1986), 388–404.

[**12**] C. F. OSGOOD, *An effective lower bound on the "diophantine approximation" of algebraic functions by rational functions*, Mathematika **20** (1973), 4-15.

[**13**] C. F. OSGOOD, *Effective bounds on the "diophantine approximation" of algebraic functions over fields of arbitrary characteristic and applications to differential equations*, Indagationes Mathematicae **37** (1975), 105–119.

[**14**] K. F. ROTH, *Rational Approximation to Algebraic Numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20.

[**15**] W. M. SCHMIDT, *On Osgood's Effective Thue Theorem for Algebraic Functions*, Communications on Pure and Applied Mathematics **29** (1976), 759–773.

[**16**] A. THUE, *Om en generel i store hele tal uløsbar ligning*, Christiania Videnskabs Selskabets Skrifter **7** (1908), 1–15.

[**17**] S. UCHIYAMA, *Rational Approximation to Algebraic Functions*, Proceedings of the Japan Academy **36** (1960), 1–2.

[**18**] J. F. VOLOCH, *Diophantine Approximation in Positive Characteristic*, Periodica Mathematica Hungarica **19(3)** (1988), 217-225.

[**19**] J. F. VOLOCH, *Diophantine Approximation in Characteristic p*, Monatshefte fűr Mathematik **119** (1995), 321–325.