Université de Bordeaux — **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation — **Année 2018/2019**

TD1

Exercice 1.

Considérons le lancer d'un dé équilibré.

1. Quel espace de probabilité naturel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suggérez-vous pour modéliser cette expérience aléatoire ?

2. Écrire en termes ensemblistes les évènements A : "le résultat est pair" et A^c : "le résultat est impair".

3. Considérons maintenant la tribu $\mathcal{B} = \{ \varnothing \ , \ \{1,2,3\} \ , \ \{4,5,6\} \ , \ \Omega \ \}$.
Est-ce que A est toujours un évènement pour cette tribu ? Que permet d'observer cette tribu ?

Exercice 2.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Écrire les événements suivants à l'aide d'opérations ensemblistes :
E_1="au moins un des A_n est réalisé" ; E_2="tous les A_n sont réalisés" ;
E_3 = "à partir de $n = 500$ aucun A_n n'est réalisé" ;
E_4 = "un nombre fini de A_n est réalisé" ;
E_5="une infinité de A_n sont réalisés" ; E_6="tous les A_n sauf un nombre fini sont réalisés".

Exercice 3.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Démontrer la formule de Poincaré

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{1\leq j\leq n} A_j\Big) = \sum_{1\leq j\leq n} (-1)^{k-1}\Big(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\Big) .$$

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.

1. Montrer que F est croissante.

2. Montrer que F est continue à droite.

3. Montrer que F admet des limites à gauche en tout point (qu'on exprimera à l'aide de X).

4. Montrer que F admet 0 pour limite en $-\infty$ et 1 pour limite en $+\infty$.

5. Pour $a \in \mathbb{R}$, exprimer $\mathbb{P}(X = a)$ à l'aide de F.

Exercice 5.

Construire une variable aléatoire réelle qui n'est ni discrète, ni à densité.

Exercice 6.

1. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire admettant une densité f.
Exprimer la loi marginale de (X_1, X_2) à l'aide de f, puis celle de X_2.

2. Construire deux v.a. X, Y à densité telles que le couple (X, Y) ne soit pas à densité.

Exercice 7.

Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[(X-a)^2]$.

Exercice 8.

Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que si $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, alors $\|X\|_p \leqslant \|X\|_q$.

Exercice 9.

Une urne contient N boules de K couleurs différentes : N_1 boules de la couleur 1, N_2 boules de la couleurs 2,... N_K boules de la couleur K avec $N_1 + N_2 + \cdots + N_K = N$. On pose $p_i = N_i/N$ la proportion initiale de la couleur i. On tire au hasard $n \leq N$ boules dans l'urne et on s'intéresse à la répartition des couleurs dans l'échantillon obtenu. On note $p(n_1, \ldots, n_K)$ la probabilité d'obtenir n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,..., n_K boules de la couleur K. Déterminer cette probabilité lorsqu'on fait

1) un tirage sans remise,

2) un tirage avec remise.