Université de Bordeaux | **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation, Option A | **Année 2018/2019**

TD2

Exercice 1.

Dans l'expérience consistant à lancer deux fois une même pièce équilibrée, considérons les évènements

$$\begin{aligned} A &= \text{“pile au premier lancer”}\ , \\ B &= \text{“pile au deuxième lancer”}\ , \\ C &= \text{“même résultat aux deux lancers”}\ . \end{aligned}$$

Est-ce que les évènements A, B, C sont indépendants deux à deux ? dans leur ensemble ?

Exercice 2. Calculs de fonctions génératrices

1. Calculer les fonctions génératrices de

a) la loi binomiale de paramètre (n, p),

b) la loi de Poisson de paramètre λ,

c) la loi géométrique de paramètre p.

2. En déduire les espérances et variances de ces lois.

3. Montrer que la somme de deux v.a. indépendantes de lois $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Exercice 3. Interprétation de la fonction génératrice

En un jour ensoleillé, une personne se promène dans les bois et ramasse un nombre aléatoire N de champignons. Supposons que tous les champignons aient indépendamment la même probabilité d'être comestible, notée p. Le nombre N est également indépendant du caractère comestible des champignons. Montrer que la probabilité que tous les champignons ramassés soient comestible est $G(p)$ où G est la fonction génératrice de N.

Exercice 4.

Calculer la loi de la somme de deux v.a. indépendantes uniformes sur $[0, 1]$.

Exercice 5. Propriété d'absence de mémoire

Soit X une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Montrer que X vérifie la propriété d'absence de mémoire

$$\forall t, s > 0, \quad \mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s)\ .$$

Interpréter en termes de probabilités conditionnelles.

2. Montrer que la partie entière supérieure $Y = \lceil X \rceil$ de X suit une loi géométrique.

3. Montrer que Y vérifie aussi une propriété d'absence de mémoire

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y > m + n) = \mathbb{P}(Y > m)\mathbb{P}(Y > n)\ .$$

Exercice 6.

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des v.a. indépendantes de même loi à densité f.

1. Calculer la loi du couple $(A, B) = (\min(X_i), \max(X_i))$. Indication : calculer $\mathbb{P}(a < A, B < b)$.

2. Dans le cas où les X_i sont uniformes sur $[0, 1]$, donner la loi de $B - A$.

Exercice 7. Le problème des parapluies

À l'entrée d'un restaurant, n personnes déposent leur parapluie à l'entrée. En partant, chacune récupère un parapluie au hasard : la première choisit le sien de manière uniforme parmi les n parapluies, la deuxième en prend un de façon uniforme parmi les $n-1$ restants, etc.

1. Montrer qu'on peut modéliser cette expérience avec l'espace de probabilités $\Omega = \mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ muni de la loi uniforme.

2. **a.** Quelle est la probabilité pour que la première personne récupère son parapluie ?
b. Quelle est la probabilité pour que la i-ième personne récupère son parapluie ?
c. Ces évènements sont-ils indépendants ?

3. Quelle est l'espérance du nombre de personnes qui récupèrent leur propre paraluie ?

4. Déterminer la probabilité p_n qu'au moins une personne récupère son parapluie. Que devient p_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 8. Loi de Hardy-Weinberg

Les gènes se présentent le plus souvent en paire et sous deux formes d'allèles que nous noterons A et B. Cela donne donc trois génotypes possibles : AA, AB, et BB. Chaque individu reçoit au hasard un allèle du gêne de chaque parent. Pour chaque parent, l'allèle transmis est choisi avec probabilité $\frac{1}{2}$ parmi les deux disponibles. On suppose que les génotypes des deux parents sont indépendants et de même loi : on notera x la probabilité du génotype AA, $2y$ celle du génotype AB et z celle du génotype BB. On remarquera que $x + 2y + z = 1$.

1. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant.

2. Vérifier que, si $x = y = z = \frac{1}{4}$, alors les génotypes de l'enfant ont les mêmes probabilités d'apparition que chez ses parents.

3. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant de la seconde génération. Que constatez-vous ?

Exercice 9. Lois Gamma, χ^2, Student

On appelle loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ la loi $G(a, \lambda)$ de densité

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{x>0}\ , \quad \text{où} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx\ .$$

1. Soit X une v.a. de loi $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois $G(a, \lambda)$ et $G(b, \lambda)$. Montrer que $X + Y$ suit la loi $G(a+b, \lambda)$, et montrer que

$$B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ .$$

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

4. Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $Y^2 \sim G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.

5. Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
Calculer la loi de $Z = Y_1^2 + \ldots + Y_n^2$ (appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté). En déduire $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

6. Soient Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante des Y_i.
Calculer la loi de $\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{Z}}$ (appelée loi du Student à n degrés de liberté).