Université de Bordeaux | **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation, Option A | **Année 2018/2019**

TD3

Exercice 1.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r.

1. Calculer la variance de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. Que peut-on dire si les X_i sont indépendantes ?

Exercice 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $p \in [1, \infty[$.
Montrer que $L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Exercice 3. Calculs de fonctions caractéristiques

1. Calculer les fonctions caractéristiques des lois binomiale, géométrique et de Poisson.
Comparer avec le calcul de la fonction génératrice.

2. Calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
En déduire les moments (de toute ordre) de cette loi.

Exercice 4. Fonction caractéristique de la loi normale

On rappelle la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ qui est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1. Calculer la fonction caractéristique Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
(On pourra chercher une équation différentielle d'ordre 1 que satisfait Φ.)

2. Calculer la fonction caractéristique Ψ de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

3. Montrer que si X, Y sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors

$$X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) .$$

Exercice 5.

On lance un dé équilibré à six faces une infinité de fois.
On note X, Y le nombre de lancers nécessaires pour obtenir respectivement un 5 et un 6.
Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X|Y = 1]$ et $\mathbb{E}[X|Y = 2]$.

Exercice 6.

1. Soient $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p), X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ indépendantes.
Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. En déduire $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2]$.

2. Soient $X_1, \ldots, X_p$ des v.a. de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
Déterminer la loi conditionnelle de $(X_1, \ldots, X_p)$ sachant $X_1 + \ldots + X_p$. En déduire $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2]$.

Exercice 7.

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $(x, y) \mapsto 2e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{0<x<y}$.
Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 8. Trois propriétés de cours sur l'espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soient X, Z deux v.a.r. intégrables telles que XZ soit aussi intégrable. On suppose que Z est $\mathcal{B}$-mesurable. Montrer qu'alors

$$\mathbb{E}[XZ|\mathcal{B}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \ .$$

2. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Montrer que pour toute v.a.r. X intégrable,

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_2] \ |\mathcal{B}_1\Big] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1] \ .$$

3. Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\sigma(X)$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X] \ .$$

(En particulier, si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.)

Exercice 9. Application du lemme de Borel-Cantelli

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$?

2. Notons φ la densité de $\mathcal{N}(0,1)$ et $G(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$. Montrer que $\forall x > 0, \ G(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

3. Soit $c > 1$. Montrer que presque sûrement, se produisent seulement un nombre fini des événements

$$A_n = \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\sqrt{2 \log n} \right\} \ .$$

4. Montrer que presque sûrement $\limsup \dfrac{S_n}{\sqrt{2n \log n}} \leqslant 1$.

En déduire que presque sûrement on a $S_n < 2\sqrt{n \log n}$ à partir d'un certain rang.

Exercice 10. Fonction caractéristique de la loi Gamma

Soient $a > 0$, $\lambda > 0$. Pour z complexe, on considère (sous réserve d'existence) l'intégrale

$$\psi(z) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - z)x} x^{a-1} dx \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition D de ψ.

2. Calculer la valeur de $\psi(t)$ pour $t \in]\lambda, +\infty[$.

3. Montrer que ψ est holomorphe sur D.

4. En déduire la fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres (a, λ).