TD3 - Correction et Remarques

Exercice 1.

Exercice 2. Correction

Soit $X \in L^p(\Omega)$. Pour $n \geqslant 1$, posons $X_n = X\mathbf{1}_{|X|\leqslant n}$.
Comme $|X_n| \leqslant n$, on a $X_n \in L^\infty(\Omega)$.
De plus,

$$\mathbb{E}[|X - X_n|^p] = \mathbb{E}[|X|^p \mathbf{1}_{|X|>n}] \ .$$

Or $X \in L^p$ donc $|X| < \infty$ p.s. ce qui donne que

$$|X|^p \mathbf{1}_{|X|>n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

Mais alors,

$$\forall n, \quad |X|^p \mathbf{1}_{|X|>n} \leqslant |X|^p \in L^1 \ .$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée assure que

$$\mathbb{E}[|X - X_n|^p] \longrightarrow 0 \ ,$$

c'est-à-dire que $X_n \to X$ dans L^p. Cela prouve que $L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
Remarque : A fortiori, $L^2(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ si $p \in [1, 2]$.

Exercice 3.

Exercice 4. Remarque

Dans la question 1, on prendra garde à bien rédiger l'utilisation du théorème de dérivation sous le signe $\int$. Si les hypothèses de ce théorème ne sont pas connues, il faut les revoir d'urgence.

Exercice 5. Remarques et corrigé

Dans cet exercice, les v.a. X et Y sont discrètes. Par conséquent, on pouvait appliquer directement la formule vue en cours pour le calcul de l'espérance conditionnelle, par exemple

$$\mathbb{E}[X|Y = 1] = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=1\}}]}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n\mathbb{P}(X = n, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(X = n|Y = 1) \ .$$

Vous pouvez utiliser directement l'une de ces trois expressions, selon ce qui vous arrange.
1. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc $\mathbb{E}[X] = 6$.
2. Sachant $Y = 1$, X est le premier indice après 2 où l'on obtient un 5. Par conséquent, la loi conditionnelle de $X - 1$ sachant $Y = 1$ est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc

$$\mathbb{E}[X|Y = 1] = 1 + \mathbb{E}[X - 1|Y = 1] = 1 + 6 = 7 \ .$$

3. Pour la dernière, il fallait poser le calcul :

$$\mathbb{E}[X|Y = 2] = \sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(X = k|Y = 2) \ .$$

Pour faire les calculs, notons L_n le résultat du n-ième lancer.

D'abord,

$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(L_1 \neq 6, L_2 = 6) = \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{5}{36} .$$

Ensuite,

$$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \mathbb{P}(L_1 = 5, L_2 = 6) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(X=1|Y=2) = \frac{1}{5} .$$

(Remarque : on aurait pu aussi dire que sachant $Y=2$, le résultat du premier lancer n'est pas un 6, donc la probabilité d'obtenir un 5 au premier lancer est de $\frac{1}{5}$.)

Bien sûr, $\mathbb{P}(X=2, Y=2) = 0$ car on ne peut pas obtenir à la fois 5 et 6 au deuxième lancer.

Enfin, pour $k \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(X=k, Y=2) = \mathbb{P}(L_1 \notin \{5,6\}, L_2 = 6, L_3 \neq 5, \ldots, L_{k=1} \neq 5, L_k = 5) = \frac{4}{6}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-3}\frac{1}{6}$$

d'où

$$\mathbb{P}(X=k|Y=2) = \frac{2}{15}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-3} = \frac{2}{15}\frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{4}{25}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{144}{125}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} .$$

Ainsi, en reconnaissant l'espérance de la loi géométrique (à deux termes près ôtés de la somme), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=2] &= \frac{1}{5} + \frac{144}{125}\sum_{k\geqslant 3} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{144}{125}\left(6 - \frac{1}{6} - \frac{5}{18}\right) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{144}{125}\frac{50}{9} = \frac{33}{5} .\end{aligned}$$

(Remarque : il y avait plusieurs manières de mener le calcul.)

Exercice 6.

Exercice 7. Remarque

Dans le calcul de la densité marginale de y, attention à bien préciser au début "Pour $y > 0$, $q(y) = \ldots$".

En effet, dans la suite de votre calcul vous écrivez $\int_0^y$. Quand $y < 0$, cette notation ne vaut pas 0, mais vaut par définition $-\int_y^0$.

Exercice 8.

Exercice 9. Corrigé

1. Grâce à la question 3 de l'exercice 4, $S_n \sim \mathcal{N}(0,n)$ donc $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. Soit $x > 0$. On a

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\varphi(t)dt = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{x}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{t=x}^{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\varphi(x)}{x} .$$

(Remarque, on pouvait aussi écrire

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}}dt = \varphi(x)\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-xt}dt \leqslant \varphi(x)\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{\varphi(x)}{x} . \quad)$$

3. Il s'agit d'utiliser le lemme de Borel-Cantelli. Pour tout n, on a avec les questions précédentes

$$\mathbb{P}(A_n) = G\left(c\sqrt{2\log n}\right) \leqslant \frac{\varphi(c\sqrt{2\log n})}{c\sqrt{2\log n}} = \frac{e^{-c^2\log n}}{c\sqrt{2\pi}\sqrt{2\log n}} = \frac{\text{cte}}{n^{c^2}\sqrt{\log n}} \ .$$

Comme $c^2 > 1$, le critère de Bertrand assure que $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$, c'est-à-dire que presque sûrement, seul un nombre fini d'évènements A_n se réalisent. Par conséquent, on a presque sûrement, à partir d'un certain rang N (qui est aléatoire donc c'est en fait un $N(\omega)$),

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant c\sqrt{2\log n} \ .$$

4. D'après ce qui précède, pour tout $c > 1$, on a p.s. à partir d'un certain rang

$$\frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant c \ ,$$

d'où p.s.

$$\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant c \ .$$

Quitte à écarter une réunion dénombrable d'évènements de probabilité nulle (voir ci-dessous pour le détail), on obtient que p.s.

$$\forall c > 1, \quad \limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant c$$

d'où p.s.

$$\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1 \ .$$

En particulier, p.s. on a à partir d'un certain rang $\frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} < \sqrt{2}$ c'est-à-dire $S_n < 2\sqrt{n\log n}$.

Remarque : Pour le détail de l'échange des quantificateurs "pour tout" et "p.s.", voilà comment on peut rédiger. On prend une suite de c qui tend vers 1, par exemple $c_k = 1 + \frac{1}{k}$. Ce qui précède assure que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $E_k \in \mathcal{A}$ de probabilité nulle telle que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus E_k, \quad \limsup \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1 + \frac{1}{k} \ .$$

Mais alors, $E = \bigcup E_k$ est encore de probabilité nulle et

$$\forall \omega \in \Omega \setminus E, \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \limsup \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1 + \frac{1}{k} \ .$$

Maintenant, pour $\omega \in \Omega \setminus E$ fixé, on peut bien faire tendre $k \to \infty$, ce qui donne

$$\forall \omega \in \Omega \setminus E, \quad \limsup \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1 \ .$$

Exercice 10.