Université de Bordeaux | **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation, Option A | **Année 2018/2019**

TD4

Exercice 1. Convergence en probabilité et Borel-Cantelli

Soit (X_n) une suite de v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $X_n \to X$ p.s. dès lors que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum \mathbb{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty$.

2. Montrer que c'est une équivalence si les $(X_n - X)$ sont indépendantes.

3. Montrer que l'équivalence est fausse avec des $(X_n - X)$ non indépendantes.
(On pourra considérer $X_n = \frac{1}{n}Y$ où Y suit la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 2. Des exemples et contre-exemples

1. Donner une suite (X_n) qui converge p.s. mais pas dans L^1.

2. Donner une suite (X_n) qui converge dans L^1, mais pas p.s.
(On pourra considérer une suite X_n de v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(\frac{1}{n})$.)

3. Donner une suite (X_n) qui converge en probabilité, mais pas p.s.

4. Donner une suite (X_n) qui converge en loi, mais pas en probabilité.

5. Donner deux suites $(X_n), (Y_n)$ qui convergent en loi vers X, Y respectivement, mais telles que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$. Qu'en déduire sur la convergence en loi de (X_n, Y_n) ?

Exercice 3.

Soient $(X_n), (Y_n)$ deux suites de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ respectivement.
On suppose que (X_n) et (Y_n) convergent respectivement vers X, Y en probabilité.

1. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ continue. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en probabilité.

2. Montrer que (X_n, Y_n) converge en probabilité vers (X, Y).

3. En déduire que $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilité.

Exercice 4.

Soit (X_n) une suite de v.a. de densités respectives $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-(nx - n - 1)^2)$.

1. Quelle est la loi de X_n ? En déduire $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite (X_n) ?

Exercice 5.

Soit X_n de loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{\lambda}{n})$. Étudier la limite en loi de $\frac{X_n}{n}$.

Exercice 6.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose

$$Y_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} X_k} .$$

1. Quelle est la limite de (Y_n) ?

2. Montrer que $\sqrt{n}(Y_n - \lambda) \to \mathcal{N}(0, \lambda)$ en loi.

Exercice 7.

Soit (U_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log(U_k)$ converge p.s. et donner sa limite.

2. Que peut-on en déduire pour $X_n = \left(\prod_{k=1}^n U_k\right)^{\frac{\alpha}{n}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$?

3. Montrer que $Z_n = e^{\alpha\sqrt{n}}\left(\prod_{k=1}^n U_k\right)^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}$ converge en loi et donner sa limite.

Exercice 8.

Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}$ une sous-tribu.
On définit la variance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}$ par $\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2]$.

1. Montrer que
$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{F}] - (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2 .$$

2. Comparer à la variance de $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

3. En déduire que
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) .$$

Exercice 9.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. intégrables, et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Notons
$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots) .$$

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$.
Est-ce que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$?

2. Montrer que $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$.

3. Montrer que $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \ldots = \mathbb{E}[X_n|S_n]$.

4. En déduire que $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 10.

Soient $a, b > 0$ et (X, Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X = n, Y \leqslant t) = b\int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy .$$

1. Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Calculer $\mathbb{E}[\psi(Y)|X]$.

2. Calculer $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$.

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n|Y)$ puis $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 11.

Soient X, Y des v.a.r. telles que (X, Y) admette une densité sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que Y suit la loi Gamma $G(2, \lambda)$ et que la loi conditionnelle de X sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$.

Montrer que X et $Y - X$ sont des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.