
TD - Martingales 2

Exercice 1.

Soit (X_n) une suite de v.a.r. centrées indépendantes et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose que $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] < \infty$.

1. Montrer que (S_n) converge dans L^2 .
2. Montrer que (S_n) converge p.s.

Exercice 2. Théorème des trois séries, condition suffisante

Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes. Pour $a > 0$, on pose $Y_n^a = X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leq a}$.
On suppose qu'il existe $a > 0$ tel qu'on ait convergence des trois séries

$$\sum \mathbb{P}(|X_n| > a) \quad \sum \mathbb{E}[Y_n^a] \quad \sum \text{Var}(Y_n^a).$$

1. Montrer que la série $\sum (Y_n^a - \mathbb{E}[Y_n^a])$ converge p.s.
2. En déduire que $\sum Y_n^a$ converge p.s.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \neq Y_n^a\}) = 0$.
4. En déduire que $\sum X_n$ converge.

Exercice 3. Processus de Galton-Watson

Soit $(\xi_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$ une famille de v.a. à valeurs dans \mathbb{N} i.i.d. de loi μ d'espérance $m < \infty$.
On suppose que $\mu \neq \delta_1$ et $\mu \neq \delta_0$.
On définit une suite X_n en posant $X_0 = \ell \in \mathbb{N}^*$ puis par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n,j}.$$

On considère aussi la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_{k,j}, 1 \leq k < j, j \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que $(m^{-n} X_n)$ est une martingale pour la filtration (\mathcal{F}_n) .
2. En déduire que $(m^{-n} X_n)$ converge p.s. vers une v.a. Z finie p.s.
3. Supposons $m < 1$. Montrer qu'alors on a p.s. $X_n = 0$ à partir d'un certain rang.
4. Supposons $m > 1$ et que les $\xi_{n,j}$ admettent une variance σ^2 .
 - a. Montrer que $(m^{-n} X_n)$ est bornée dans L^2 .
 - b. Montrer que $\mathbb{E}[Z] = \ell$.
 - c. En déduire que $\mathbb{P}(Z > 0) > 0$.