
TD - Vecteurs Gaussiens

Exercice 1.

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^2 de loi $\mathcal{N}(0, I_2)$.

1. On définit

$$U = \frac{X + Y}{2} \quad \text{et} \quad V = \frac{X - Y}{2}.$$

Montrer que (U, V) est un vecteur gaussien et calculer sa covariance.

2. On pose

$$W = \frac{1}{2}(X - U)^2 + \frac{1}{2}(Y - U)^2.$$

Montrer que U et W sont indépendantes et déterminer la loi de W .

Exercice 2.

Soit X un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^d de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.

Déterminer la loi de $(X - m)^T \Gamma^{-1} (X - m)$.

Exercice 3.

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ dans \mathbb{R}^3 avec $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\text{Ker}(\Gamma)$.

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner les caractéristiques du vecteur gaussien AX .

En déduire que $X_2 - X_3 = 1$ p.s.

3. Le vecteur gaussien (X_1, X_2) admet-il une densité sur \mathbb{R}^2 ? Si oui laquelle?

4. Quel est le support de la loi de X dans \mathbb{R}^3 ?

Exercice 4. Densité des vecteurs gaussiens

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m \in \mathbb{R}^d$ et $\Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Soit $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $AA^T = \Gamma$.

1. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$. Montrer que X et $m + AZ$ ont même loi.

2. Montrer que toute matrice symétrique positive Γ est la covariance d'un vecteur gaussien.

3. Supposons Γ inversible. En utilisant la question 1, montrer que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et l'expliciter.

4. Supposons Γ non inversible. Montrer qu'alors il existe un hyperplan H de \mathbb{R}^d tel que $X \in H$ p.s.
En déduire que X n'est pas à densité.

Exercice 5. Espérance conditionnelle, cas gaussien

Soient X, Y des vecteurs gaussiens de \mathbb{R}^k et \mathbb{R}^ℓ respectivement.

On suppose que $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien centré. On écrit sa covariance par blocs

$$\Gamma_Z = \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{X,Y} \\ \Gamma_{Y,X} & \Gamma_Y \end{pmatrix}, \quad \text{où } \Gamma_{Y,X} = (\mathbb{E}[Y_j X_i])_{\substack{1 \leq j \leq \ell \\ 1 \leq i \leq k}}.$$

On suppose que Γ_X est inversible.

1. (**Méthode 1**) Pour $j \in \{1, \dots, \ell\}$, posons $P_j = \mathbb{E}[Y_j|X]$.

a. Montrer qu'il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}^k$ telle que $P_j = \lambda_j^T X$.

b. On forme une matrice $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ en juxtaposant les colonnes λ_j . Montrer que

$$\Lambda^T \Gamma_X = \Gamma_{Y,X}.$$

c. En déduire que $\mathbb{E}[Y|X] = \Gamma_{Y,X} \Gamma_X^{-1} X$.

2. (**Méthode 2**) Posons $P = \Gamma_{Y,X} \Gamma_X^{-1} X$.

a. Montrer que $\begin{pmatrix} X \\ Y - P \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.

b. Montrer que X et $Y - P$ sont indépendantes.

c. En écrivant $Y = P + Y - P$, en déduire $\mathbb{E}[Y|X]$.

3. Écrivons $P = (P_1, \dots, P_\ell)^T = \mathbb{E}[Y|X]$. En écrivant $Y = P + Y - P$, montrer que la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi gaussienne

$$\mathcal{N}\left(\Gamma_{Y,X} \Gamma_X^{-1} X, \Gamma_Y - \Gamma_{Y,X} \Gamma_X^{-1} \Gamma_{X,Y}\right).$$