TP3 : Méthodes de rejet

Exercice 1. Méthode de rejet number 1

Soient $B \subset A$ deux boréliens de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 < \lambda(B) \leqslant \lambda(A) < \infty$.
Soit (X_n) une suite i.i.d. de loi $\mathcal{U}(A)$.

1. Montrer que $T = \min\{ n \in \mathbb{N}^* \mid X_n \in B \}$ suit la loi $\mathcal{G}(p)$ où $p = \frac{\lambda(B)}{\lambda(A)}$.

2. Montrer que X_T suit la loi uniforme sur B, et est indépendante de T.

3. Construire un algorithme de simulation de la loi uniforme sur l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

4. Implémenter cet algorithme, et tirer 1000 échantillons (x_i, y_i) de cette loi et les représenter avec

```
plot2d(x,y,-1)
```

puis superposer l'ellipse avec les commandes

```
theta = linspace(-%pi,%pi,1e3);
plot2d(2*cos(theta),sin(theta),2)
```

5. À B fixé, comment choisir A ? Commenter en terme de temps de calcul.

Exercice 2. Méthode de rejet number 2

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

1. Notons

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < f(x) \} .$$

Quelle est la mesure de Lebesgue de S ?

2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur S. Montrer que X a pour densité f.

3. En déduire un algorithme pour simuler la loi de densité $20x(1-x)^3$ sur $[0, 1]$, et l'implémenter.

Exercice 3. Méthode de rejet number 3

Soient f, g des densités de probabilité sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $f \leqslant cg$.

1. Soient X et U deux v.a. indépendantes telles que X a pour densité g et $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Montrer que le vecteur aléatoire $(X, cg(X)U)$ suit la loi uniforme sur

$$S = \{ (x,y) \mid 0 < y < cg(x) \} .$$

2. Soient (X_n), (U_n) des v.a. indépendantes avec X_n de densité g et $U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$.
a. Montrer que $T = \min\{ n > 0 \mid cg(X_n)U_n < f(X_n) \}$ suit la loi $\mathcal{G}(\frac{1}{c})$.
b. Montrer que $cg(X_T)U_T$ admet pour densité g.

3. En déduire une autre méthode de simulation de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.