TP4 : Convergence de Variables Aléatoires

Exercice 1. Loi des Grands Nombres

Soit μ une loi de probabilité de votre choix, admettant un moment d'ordre 1 noté m.
Vous pouvez par exemple prendre la loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$ ou la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Pour $N = 1000$, simuler des v.a. $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ i.i.d. de loi μ.

2. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Tracer le graphe de $n \mapsto S_n$.

3. Tracer maintenant le graphe de $n \mapsto \frac{S_n}{n}$.

4. Qu'observez-vous ? Tracer la limite théorique avec une droite horizontale.

5. Tracer maintenant le graphe de $n \mapsto n^\alpha \left(\frac{S_n}{n} - m\right)$ pour différentes valeurs de $\alpha \in [0, 1]$. Interpréter.

6. (Bonus) Remplaçons maintenant μ par la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
De nouveau, tracer $n \mapsto \frac{S_n}{n}$. Qu'observez-vous ? Comment l'expliquer ?

Exercice 2. Théorème Central Limite

Pour illustrer une convergence en loi de (X_n) vers X, on fixe généralement un N très grand, et on compare sur un même graphique la loi de X_N et la loi de X. À N fixé on tirera un K-échantillon $(X_N^1, \ldots, X_N^K)$ de la loi de X_N ce qui permet d'afficher la loi empirique de cet échantillon.

Dans la suite, on considère une loi de probabilité μ qui admet un moment d'ordre 2.
On considère encore une suite (X_n) de v.a. i.i.d. de loi μ.

1. Écrire le résultat du théorème central limite appliqué à X_n.

2. Illustrer cette convergence en loi de deux manières différentes :
a. En superposant fonction de répartition empirique et fonction de répartition limite.
Vous pouvez utiliser la fonction `distfun_normcdf`.
b. En superposant histogramme et densité limite.

Exercice 3. Convergence p.s. vers une v.a. non constante

Considérons une suite (X_n) de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On pose $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i}$.

1. Pour tracer la fonction $n \mapsto U_n$ pour $n = 1, \ldots, 30$.

2. Que constatez-vous ? Et si vous relancez l'expérience ?

3. (U_n) semble avoir une limite U. Illustrer graphiquement la loi de U.

4. Montrer (théoriquement) qu'effectivement (U_n) converge presque sûrement.

5. (Bonus) Prenons maintenant (Y_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}(\{0, 2\})$, et posons $V_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{3^i}$.
Est-ce que (V_n) semble avoir une limite ? Pouvez-vous illustrer sa loi ?

Exercice 4. Convergence en loi avec une limite non gaussienne

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer que $Y_n = \lambda \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - \log(n)$ converge en loi.

2. Illustrer cette convergence en loi.

Exercice 5. Approximations classiques de la loi binomiale

Pour certaines valeurs des paramètres (n,p) l'échantillonnage suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être difficile. Dans certains cas, on peut l'approcher par des lois plus faciles à échantillonner.

1. Lorsque $n \to \infty$ et $p_n \to 0$ de telle sorte que $np_n \to \lambda$, alors $\mathcal{B}(n,p_n)$ converge étroitement vers $\mathcal{P}(\lambda)$.
En pratique on effectue l'approximation poissonienne de la loi binomiale lorsque $n > 30$ et $np < 5$.
Illustrer cette convergence en loi, et tester avec différents jeux de paramètres.

2. Si $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, un cas particulier du théorème central limite nous dit que

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,1)\ .$$

Ce résultat est maintenant connu sous le nom de Théorème de Moivre et Laplace car de Moivre a montré le cas $p = \frac{1}{2}$ en 1733 et Laplace a montré le cas général en 1812. En pratique on effectue cette approximation losrque $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

Illustrer cette convergence en loi, et tester avec différents jeux de paramètres.