TP : Martingales 1

Exercice 1. Ruine du joueur

Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = q\ .$$

On modélise l'évolution de la fortune d'un joueur jouant 1 euro à chaque partie et partant d'une fortune initiale $a \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i\ .$$

On suppose que le joueur s'arrête de jouer lorsqu'il a atteint la somme $b \in \mathbb{N}$ ($b > a$) ou lorsqu'il est ruiné. On note

$$T = \inf\{n \geq 0 \mid S_n = b \text{ ou } S_n = 0\}\ .$$

On va voir que $T < \infty$ p.s. et on notera alors $R = \{S_T = 0\}$ l'évènement "le joueur finit ruiné".

Partie A : Une martingale

1. Simuler avec Scilab une partie jusqu'à ruine ou fortune du joueur en fonction de a, b, et p.

2. Montrer que $M_n = S_n - n(p - q)$ est une martingale pour une filtration que l'on précisera.

3. Montrer que T est un temps d'arrêt.

Partie B : Cas $p \neq q$.

4. Calculer $\mathbb{E}[T]$ en fonction de la probabilité de ruine.

5. Posons $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. Montrer que c'est une martingale positive. En déduire $\mathbb{E}[Z_T]$.
Déduire de ce qui précède la probabilité de ruine et la valeur de $\mathbb{E}[T]$.

6. Pour $p = \frac{1}{3}$, $a = 10$ et $b = 20$, estimer numériquement la durée moyenne d'une partie.
Estimer la probabilité de ruine. Vérifier les résultats obtenus.

7. Construire un histogramme des durées des parties pour différentes valeurs de p.
a. Tracer les courbes théorique et expérimentale de la durée moyenne d'une partie en fonction de p.
b. Tracer aussi ces courbes pour la probabilité de ruine.

Partie C : Cas $p = q = \frac{1}{2}$.

8. Calculer la probabilité de ruine du joueur.

9. Montrer que $U_n = (S_n - a)^2 - n$ est une martingale. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T]$.

10. De même pour $p = \frac{1}{2}$, $a = 10$ et $b = 20$, estimer numériquement la durée moyenne d'une partie.
Estimer la probabilité de ruine. Vérifier les résultats obtenus.

Exercice 2. Illustration des lois χ^2 et Student

Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Posons

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \ .$$

1. Illustrer informatiquement que

$$(n-1)\frac{\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \ .$$

2. On rappelle que la densité de la loi du Student $T(n)$ s'écrit

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}} \ .$$

Illustrer informatiquement que

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_n^2}} \sim T(n-1) \ .$$

3. En déduire un intervalle de confiance $[S_n, T_n]$ de niveau $1-\alpha$ pour l'estimation de m (à σ inconnu).

4. Tracer une trajectoire $n \mapsto \overline{X}_n$.

Superposer avec les courbes correspondant aux bornes de l'intervalle de confiance ($n \mapsto S_n$ et $n \mapsto T_n$).