Université de Bordeaux **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation **Année 2018/2019**

TP : Vecteurs gaussiens

Exercice 1. Simulation d'un vecteur gaussien

On rappelle qu'on a déjà rencontré la méthode de Box-Muller pour simuler la loi $\mathcal{N}(0, I_2)$.
L'objectif de cet exercice est de simuler un loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ sur $\mathbb{R}^d$ quelconque.

1. Expliquer comment simuler $\mathcal{N}(0, I_d)$.

2. Consulter l'aide de la fonction `chol`.

3. En déduire une méthode de simulation de la loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.
En Scilab, il existe évidemment une fonction pour réaliser l'échantillonage de cette loi. Il s'agit de

```
grand(n,"mn",Mean,Cov)
```

4. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons un vecteur gaussien centré de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0 \text{ et } \rho \in [-1, 1] \ .$$

a. Étant donnés σ_1, σ_2, ρ fixés, $n = 1000$, tirer un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ et afficher le n-échantillon sous la forme d'un nuage de points à l'aide de `plot2d`.
b. Tester avec différentes valeurs des paramètres.
c. Calculer la covariance empirique du n-échantillon tiré. Commenter.

Exercice 2. Loi du χ^2 et Théorème de Cochran

1. Écrire une fonction qui simule un n-échantillon de loi $\chi^2(d)$.

2. Vérifier votre fonction en tirant un n-échantillon de $\chi^2(2)$
a. en comparant l'histogramme avec la densité de $\chi^2(2)$,
b. en comparant fonctions de répartitions empirique et théorique. On pourra utiliser `cdfchi`.
c. Faire de même pour $d = 4$.

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ et posons

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \ .$$

Illustrer informatiquement que

$$(n-1)\frac{\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \ .$$

Exercice 3. Loi du Student

Par définition, la loi du Student à n degrés de liberté (qu'on notera ici $T(n)$) est la loi de la v.a. $\dfrac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{Z}}$ où Y, Z sont indépendantes, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z \sim \chi^2(n)$.

1. Montrer que la loi $T(n)$ admet pour densité

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}} \ .$$

2. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On note encore

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 \ .$$

Montrer que $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_n^2}} \sim T(n-1)$.

3. En déduire un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour l'estimation de m (à σ inconnu).

4. Simuler un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et implémenter cet intervalle de confiance.
(On pourra utiliser la fonction `cdft`.)
Tester cette fonction sur plusieurs échantillons.

Exercice 4.

Soit (X, Y) un vecteur gaussien d'espérance nulle et de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner la densité de (X, Y).

2. Exprimer la loi conditionnelle de Y sachant X.

3. Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.

4. Écrire une fonction qui réalise l'échantillonnage conditionnel de Y sachant $X = x$.