Examen d'analyse fonctionnelle

M1, ENS Cachan, 2013-14

Attention: Les documents ne sont pas autorisés pour cet examen.

Exercice 1 : Soit E un espace toppologique.

1. Montrer que si A est une partie de E, il existe un plus petit élément (noté $\bar{A}$) pour la relation d'inclusion sur l'ensemble des parties fermées de E contenant A.

2. Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, alors $\overline{\cap_{i\in I}A_i} \subset \cap_{i\in I}\bar{A}_i$.

3. Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de parties de E, alors $\overline{\cup_{i\in I}A_i} = \cup_{i\in I}\bar{A}_i$.

4. Trouver un espace toppologique E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E telle que

$$E = \cap_{i\in I}\bar{A}_i, \qquad \emptyset = \overline{\cap_{i\in I}A_i}.$$

Exercice 2 : Soit E un espace métrique complet.

1. Enoncer le théorème de Baire

2. Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de fermés de E telle que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}}F_n$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}}[(F_n)^o]$ est dense dans E.

3. Montrer que le résultat de la question 2 ne subsiste pas si E n'est pas supposé complet.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans L^∞ $w*$, où u est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$.

1. Rappeler ce que signifie l'assertion ci-dessus en termes explicites (i.-e. en termes de fonctions test et de suites convergentes dans $\mathbb{R}$).

2. Donner un exemple (explicite) de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans L^∞ $w*$ (où u est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$) mais telle que $u_n^2 \rightharpoonup v$ dans L^∞ $w*$ (où v est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$) avec $v \neq u^2$.

3. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans L^∞ $w*$ et $u_n^2 \rightharpoonup v$ dans L^∞ $w*$ (où u, v sont des fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$). Montrer que $v \geq u^2$. on pourra écrire $u_n^2 = (u_n - u)^2 + u^2 + 2\,(u_n - u)\,u$.

4. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (continue). On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans L^∞ $w*$ et $\phi\, o\, u_n \rightharpoonup v$ dans L^∞ $w*$ (où u, v sont des fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$). Montrer que $v \geq \phi\, o\, u$.

Exercice 4 : On note $k_\varepsilon(x) = e^{(-\varepsilon+i)\,x^2/2}$.

1. a) Montrer que pour $\varepsilon > 0$, k_ε et $x \mapsto x\,k_\varepsilon(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\hat{k}_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, et pour $\xi \in \mathbb{R}$, calculer $(\hat{k}_\varepsilon)'(\xi)$ en fonction de $\mathcal{F}(x \mapsto x\,k_\varepsilon(x))(\xi)$.

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(\hat{k}_\varepsilon)'(\xi) = \frac{\xi}{-\varepsilon + i}\,\hat{k}_\varepsilon(\xi).$$

d) Calculer (pour tout $\varepsilon > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$) $\hat{k}_\varepsilon(\xi)$ en fonction de $\hat{k}_\varepsilon(0)$.

2. a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (que l'on précisera explicitement) telle que pour tout $A > 0$,

$$\left| \int_A^\infty e^{(-\varepsilon+i)\,|x|^2/2}\,dx \right| \leq C\,A^{-1}.$$

b) Montrer que $\hat{k}_\varepsilon(0)$ admet une limite lorsque $\varepsilon \to 0$ (que l'on notera dorénavant K).

3. a) Montrer que pour tout $\varepsilon \geq 0$, k_ε définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (noté U_{k_ε}).

b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} U_{k_{1/n}} = U_{k_0}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\widehat{U_{k_0}} = U_{\left\{\xi \mapsto K\, e^{-i\frac{|\xi|^2}{2}}\right\}}$.

4. a) Montrer que $f : x \mapsto x\, \exp(i\, x^2/2)$ définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

b) Calculer $\hat{U}_f$ (en fonction de K).

Exercice 5 : 1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est la distribution associée à une fonction constante (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si $T' = 0$.

2. On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ ne dépend que de la première variable si pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$< T, \phi > \int_{\mathbb{R}} \chi(y)\, dy = < T, (x,y) \mapsto \chi(y) \int_{\mathbb{R}} \phi(x,z)\, dz > .$$

a) Montrer que la définition précédente est sensée, i.-e. que $(x,y) \mapsto \chi(y) \int_{\mathbb{R}} \phi(x,z)\, dz \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

b) Montrer que si $f \in C(\mathbb{R}^2)$, alors U_f ne dépend que de la première variable lorsque f ne dépend que de la première variable.

c) Réciproquement, si $f \in C(\mathbb{R}^2)$ et U_f ne dépend que de la première variable, montrer que f ne dépend que de la première variable. On pourra montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int \left\{ \int f(x,y)\, \psi(x)\, dx \right\} s(y)\, dy = 0,$$

où $s \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est d'intégrale nulle.

3. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ ne dépend que de la première variable si et seulement si $\partial_2 T = 0$.