Examen d'analyse fonctionnelle

M1, ENS Cachan, 2014-15

Attention: Les documents ne sont pas autorisés pour cet examen. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Le signe ¶ signifie qu'une question est difficile.

Exercice 1 :

1. Montrer que si $f \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$, alors ($\partial_2$ désignant la dérivée par rapport à la seconde variable)

$$\int_0^1 |f(x,0)|^2\,dx \le 2\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|^2\,dxdy + 2\int_0^1\int_0^1 |\partial_2 f(x,y)|^2\,dxdy.$$

2. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2) := W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ est complet (on admettra que $L^2(\mathbb{R}^2)$ est complet). A-t-on densité de $C^1_c(\mathbb{R}^2)$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, muni de sa norme (on ne demande pas la démonstration)?

3. Rappeler l'énoncé précis du théorème de prolongement des applications linéaires continues sur un sous-espace dense. Montrer qu'il existe une application linéaire continue T de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(]0,1[)$ (chacun muni de sa norme) telle que si $f \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$, $(Tf)(x) = f(x,0)$ pour presque tout $x \in]0,1[$.

4. Montrer que si pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$, et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors $(x \in]0,1[\mapsto f_n(x,0))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^2(]0,1[)$ faible.

5. a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $f \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{1/4} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi,\eta)\,d\eta \right|^2 d\xi \le C \int\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{1/4}\,(1+|\eta|^2)^{3/4} |\hat{f}(\xi,\eta)|^2\,d\eta d\xi.$$

b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $f \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{1/4} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi,\eta)\,d\eta \right|^2 d\xi \le C \int\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2+|\eta|^2)\,|\hat{f}(\xi,\eta)|^2\,d\eta d\xi.$$

c) Rappeler (sans démonstration) le théorème de Plancherel, et la définition de $H^1(\mathbb{R}^2)$ basée sur la transformée de Fourier.

d) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $f \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{1/4} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi,\eta)\, d\eta \right|^2 d\xi \leq C\, ||f||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

e) Montrer que si pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in C_c^1(\mathbb{R})$, $\;\text{Supp}\; g_n \subset]-1,1[$, et si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{g_n}(\xi)$ converge pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ vers $\hat{g}(\xi)$, où $g \in L^2(\mathbb{R})$.

¶ f) Montrer que si pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$, $\;\text{Supp}\; f_n \subset]-1,1[^2$, et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors $(x \in]0,1[\mapsto f_n(x,0))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^2(]0,1[)$ fort.

Exercice 2 : On note $c_0 := \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad c_n \to 0 \;\text{ lorsque }\; n \to \infty\}$, et $\mathcal{E} := \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (e^{\lambda\, n}\, c_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\text{ est bornée }\}$.

1. a) Rappeler (sans démonstration) quel est le dual de $l^1(\mathbb{N})$ (ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ dont la série associée converge absolument, muni de la norme donnée par la somme de la série des valeurs absolues de ses éléments).

b) Montrer que c_0 (muni de la norme uniforme $||\;||_{l^\infty}$) est un sous-espace complet de l'espace $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées (muni de la même norme, et pour lequel la complétude est admise).

c) Trouver explicitement une suite de la boule unité fermée de c_0 qui converge vers la suite nulle dans $l^\infty(\mathbb{N})$ faible $*$, et qui n'admet pas de sous-suite convergente dans $l^\infty(\mathbb{N})$ fort.

2. a) Montrer que

$$p_k\left((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} [\, e^{k\, n}\, |c_n|\,],$$

pour $k \in \mathbb{N}$, définit une famille dénombrable (filtrante) de semi-normes associée à une topologie métrisable sur $\mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{E}$ (muni de la topologie définie à la question précédente) est séparable.

3. On dit qu'un sous-ensemble B de $\mathcal{E}$ est borné lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $p_k(B)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les fermés bornés de $\mathcal{E}$ (muni de la topologie définie à la question 2. a), les bornés étant définis ci-dessus) sont compacts (pour cette topologie).

¶**4**. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur $\mathcal{E}$ dont la topologie associée soit celle définie à la question 2. a). On pourra faire le lien entre les différentes notions de bornés apparaissant dans cet exercice (ceux définis à la question 3. et ceux définis par une éventuelle norme) et les ensembles vérifiant la propriété suivante (relative à une topologie donnée): pour tout voisinage V de 0, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda\, B \subset V$ (ici, l'ensemble $\lambda\, B$ est formé des points $\lambda\, x$, avec $x \in B$).

Exercice 3 : Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $p \in]1, 2[$, on définit

$$< S_p, \phi > := \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{|x|^p} \cos x \, dx.$$

1. Montrer que les quantités $< S_p, \phi >$, pour $p \in]1, 2[$, sont bien définies, et caractérisent des distributions sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 1. Ces distributions se prolongent t-elles en distributions tempérées?

2. Montrer que pour $p \in]1, 2[$, $(x \mapsto x)\, S_p = U_{g_p}$, où les g_p sont des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$ que l'on explicitera.

3. Calculer, pour $p \in]1, 2[$, les dérivées au sens des distributions $(U_{x \mapsto x\, |x|^{-p}\, \cos x})'$ en fonction de S_p, et de distributions associées à des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, et $f \in L^p(\mathbb{R})$, pour $p \in [1, \infty[$.

1. On rappelle que $(\phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x - y)\, f(y)\, dy$. Montrer que $\phi * f \in L^p(\mathbb{R})$, et montrer que $||\phi * f||_{L^p(\mathbb{R})} \leq ||\phi||_{L^1(\mathbb{R})}\, ||f||_{L^p(\mathbb{R})}$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}} \in L^1(\mathbb{R})$, et montrer que $f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}} \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ (fort).

b) Rappeler la définition de la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Montrer que $U_{f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}}}$ et U_f sont des éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Montrer que $U_{f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}}}$ converge vers U_f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\mathcal{F}[U_{(f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}})}]$ converge vers $\widehat{U_f}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et que pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\psi\, \mathcal{F}[U_{(f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}})}]$ converge vers $\psi\, \widehat{U_f}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3. a) Montrer que $\phi * (f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}})$ converge vers $\phi * f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ (fort).

b) Montrer que $\mathcal{F}[U_{\phi * (f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}})}]$ converge vers $\mathcal{F}[U_{\phi * f}]$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

4. a) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[\phi * (f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}})](\xi) = \hat{\phi}(\xi)\ \mathcal{F}[f\, 1_{\{|\cdot| \leq n\}}](\xi).$$

b) Montrer que

$$\mathcal{F}(U_{(x \mapsto e^{-|x|^2/2}) * f}) = (\xi \mapsto \sqrt{2\pi} e^{-|\xi|^2/2})\, (\mathcal{F} U_f)(\xi).$$

5. a) Montrer que si pour presque tout $z \in \mathbb{R}$, $[(x \mapsto e^{-|x|^2/2}) * f](z) = 0$, alors $f = 0$ (presque partout).

b) Enoncer précisément (sans démonstration) le théorème d'identification de $(L^q(\mathbb{R}))'$ et $L^{(q')}(\mathbb{R})$, en précisant pour quels $q \in [1, +\infty]$ ce théorème est valide.

c) Montrer que pour $p \in]1, +\infty[$, l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto e^{-(x-x_0)^2/2}$ (pour $x_0 \in \mathbb{R}$), est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. On pourra utiliser les conséquences du théorème de Hahn-Banach.