Examen d'analyse fonctionnelle

M1, ENS Cachan, 2015-16

Attention: Les documents ne sont pas autorisés pour cet examen. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Le signe ¶ signifie qu'une question est difficile.

Exercice 1 : **1**. Exhiber un espace topologique qui n'est pas métrisable (on démontrera que l'espace choisi est effectivement non métrisable).

2. Soit E un espace topologique.
a) Montrer que si $A \subset B \subset E$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.
b) Montrer que si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
c) Lorsque $A \subset E$ et $B \subset E$, a t-on toujours $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$?

Exercice 2 : **1**. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit

$$< T, \phi >:= \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \, e^{-|x|} \, dx.$$

a) Montrer que T est une distribution d'ordre au plus 1.
b) Montrer que $(x \mapsto x) \, T = U_f$, où $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est une fonction que l'on explicitera.
c) Montrer que T se prolonge en une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-|x|}$.
b) Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
c) Montrer que U_{arctan} se prolonge en une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, et calculer $(\xi \mapsto \xi) \, (\mathcal{F} U_{\text{arctan}})$.
d) Montrer que $\mathcal{F} U_{\text{arctan}} = d \, T + c \, \delta_0$, où $c \in \mathbb{R}$, et $d \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on calculera.
e) Calculer c.

Exercice 3 : On note

$$E := \{ f \in L^2(\mathbb{R}), \ \forall k \in \mathbb{N}, x \mapsto (1+x^2)^{k/2} f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \}.$$

1. a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, la formule

$$p_k(f) = \left(\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^k \, |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

définit une semi-norme sur E.

b) Rappeler quelle est la définition de la topologie de E associée aux semi-normes définies à la question précédente.

2. a) Rappeler les conditions suffisantes vues en cours permettant de montrer que la topologie associée à un ensemble muni d'une famille de semi-normes est métrisable.

b) Montrer que ces conditions sont réunies lorsque l'on munit E des semi-normes p_k, pour $k \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que parmi les distances qui permettent de métriser E, celle que l'on a présentée en cours (et que l'on explicitera, sans redémontrer qu'elle métrise E) fait de E un espace complet.

4. a) Montrer que $L^2_c(\mathbb{R})$ (ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ dont le support est compact) est dense dans E (muni des semi-normes p_k, pour $k \in \mathbb{N}$).

b) Montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans E (muni des semi-normes p_k, pour $k \in \mathbb{N}$).

5. a) En considérant $\int_{\mathbb{R}} [y \mapsto (1+y^2)^k\, f(y)]'(x)\, f'(x)\, dx$, montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$p_k(f')^2 \leq p_0(f'')\, p_{2k}(f) + k\,(2k-1)\, p_{k-1}(f)^2.$$

En déduire que

$$p_k(f')^2 \leq p_0(f'')^2 + 2k^2\, p_{2k}(f)^2.$$

b) Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $C_{kn} > 0$ telle que pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$p_k(f^{(n)}) \leq C_{kn} \left(p_{2^n k}(f) + \sum_{q=1}^{n+1} p_0(f^{(q)}) \right).$$

¶6. a) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $||f||_\infty^2 \leq \pi\, p_1(f')^2$.

b) Montrer que pour $q \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)^q\, f(x)|^2 \leq 2\pi\, [p_{2q+1}(f')]^2 + 2\pi\, (2q)^2\, [p_{2q}(f)]^2.$$

c) Montrer que $E \cap H^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On rappelle que $H^\infty(\mathbb{R}) := \cap_{n \in \mathbb{N}} H^n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 : On note $\Omega := B_{\mathbb{R}^3}(0,1)$ la boule unité (euclidienne) ouverte de $\mathbb{R}^3$, et on considère $A \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$A_0 \leq A(x) \leq A_1 \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega,$$

où $A_0, A_1 > 0$.

1. a) Rappeler de manière précise le lien permettant d'identifier un espace de Hilbert H et son dual topologique H'.

b) Pour $u, v \in H^1(\Omega)$, on pose

$$<< u, v >>= \int_\Omega \Big(\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + A(x)\, u(x)\, v(x) \Big)\, dx.$$

Montrer que cette formule définit un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$ dont la norme associée est équivalente à la norme traditionnelle de $H^1(\Omega)$.

c) L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme associée au produit scalaire $<< u, v >>$ est-il complet?

d) Montrer que pour $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega A(x)\, u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

On note $u = T_A(f)$.

e) Rappeler le théorème d'injection de Sobolev de H^1 (d'un domaine de $\mathbb{R}^N$) pour $N \geq 3$.

f) Montrer que T_A est une application linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ dont la norme (triple) est inférieure à $C\, A_0^{-1}$, où C est une constante qui ne dépend pas de A.

2. Soit $f \in L^2(\Omega)$, et $D \in L^2(\Omega)$ telle que

$$D_0 \leq D(x) \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega,$$

où $D_0 > 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite $A_n \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$D_0 \leq A_n(x) \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega,$$

et telle que A_n converge vers D dans $L^2(\Omega)$ et presque partout.

b) Montrer que $T_{A_n}(f)$ est une suite bornée de $H^1(\Omega)$ dont une sous-suite $T_{A_{\sigma(n)}}(f)$ vérifie les propriétés suivantes:

$$T_{A_{\sigma(n)}}(f) \to g \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega,$$

$$\nabla T_{A_{\sigma(n)}}(f) \rightharpoonup \nabla g \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega),$$

pour une fonction $g \in H^1(\Omega)$.

c) Montrer que $A_{\sigma(n)}\, T_{A_{\sigma(n)}}(f)$ est une suite bornée de $L^{3/2}(\Omega)$ qui converge presque partout vers $D\, g$.

d) Montrer que $D\, g \in L^{6/5}(\Omega)$ et que $A_{\sigma(n)}\, T_{A_{\sigma(n)}}(f)$ est une suite qui converge vers $D\, g$ dans $L^{6/5}(\Omega)$ (fort).

e) Montrer que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla g(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega D(x)\, g(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

¶ f) Quels sont les $p < 2$ pour lesquels on peut démontrer 2. e) lorsque $D \in L^p(\Omega)$ (et $D_0 \leq D(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$ où $D_0 > 0$).