Analyse fonctionnelle — Examen Décembre 2016

Exercice 1

1. Considérons un espace de Hilbert H réel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)$. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H. On dit que cette suite est un frame s'il existe deux réels strictement positifs A et B tels que,

$$\forall x \in H, \quad A\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 \leq B\|x\|^2. \tag{1}$$

a. Supposons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H. Dire si les quatre familles suivantes sont ou ne sont pas des frames (donner à chaque fois une justification succincte) :

- $E_1 = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $E_2 = (e_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$;
- $E_3 = (e_0, e_0, e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \ldots)$ où chaque élément est répété deux fois ;
- $E_4 = (e_n/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$;

b. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un frame. Notons $V = \operatorname{Vect}\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que V est un sous-espace dense dans H.

2. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 < +\infty$ pour tout $x \in H$. Introduisons l'application $U\colon H \to \ell^2(\mathbb{N})$ définie par $U(x) = (\,(x, x_n)\,)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer à l'aide d'un théorème général sur les espaces de Banach que l'application U est continue. En déduire qu'il existe $B > 0$ telle que

$$\forall x \in H, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 \leq B\|x\|^2. \tag{2}$$

3. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in H, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 \leq B\|x\|^2. \tag{3}$$

Considérons un ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$ et une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

a. Montrer que

$$\Big\| \sum_{n\in F} c_n x_n \Big\|^2 \leq \sup_{y\in H,\ \|y\|=1} \Big(\sum_{n\in F} |c_n|^2 \Big) \Big(\sum_{n\in F} |(y, x_n)|^2 \Big).$$

b. En déduire que

$$\Big\| \sum_{n\in F} c_n x_n \Big\|^2 \leq B \sum_{n\in F} |c_n|^2.$$

Puis montrer que la série $\sum c_n x_n$ converge.

Exercice 2 : le lemme div-curl

Notations : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $C^\infty(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont la restriction à Ω de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. On note $C_0^\infty(\Omega)$ les fonctions C^∞ et à support compact dans Ω.

Considérons un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et deux suites de champs de vecteurs, $E_n\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ et $B_n\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$. On note (E_n^1, E_n^2) et (B_n^1, B_n^2) les coordonnées de E_n et B_n. On suppose que :

(H1) E_n et B_n appartiennent à $C^\infty(\overline{\Omega})^2$ pour tout entier n.

(H2) On a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\|E_n\|_{L^2(\Omega)^2} + \|B_n\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{div} E_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{curl} B_n\|_{L^2(\Omega)} \Big) < +\infty,$$

où $\operatorname{div} E_n$ et $\operatorname{curl} B_n$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\operatorname{div} E_n = \partial_{x_1} E_n^1 + \partial_{x_2} E_n^2, \qquad \operatorname{curl} B_n = \partial_{x_2} B_n^1 - \partial_{x_1} B_n^2.$$

(H3) Il existe $E \in L^2(\Omega)^2$ et $B \in L^2(\Omega)^2$ telles que $E_n \rightharpoonup E$ et $B_n \rightharpoonup B$ dans $L^2(\Omega)^2$, ce qui signifie que chaque coordonnée converge faiblement ($E_n^j \rightharpoonup E^j$ pour $j = 1, 2$ et de même pour B_n).

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$(*) \qquad \int_\Omega \varphi(x) E_n(x) \cdot B_n(x)\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi(x) E(x) \cdot B(x)\, dx,$$

où $x \cdot y$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$.

1. Fixons une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et considérons $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 sur le support de φ, de sorte que $\chi\varphi = \varphi$. On introduit

$$v_n = \varphi E_n, \quad w_n = \chi B_n, \quad v = \varphi E, \quad w = \chi B.$$

On étend ces fonctions par 0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ (et on les note toujours v_n, w_n, v, w). Montrer que v_n et w_n appartiennent à $H^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que v_n converge faiblement vers v dans $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ et que de même w_n converge faiblement vers w dans $L^2(\mathbb{R}^2)^2$.

2. Soit $f = (f^1, f^2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On note $\widehat{f} = (\widehat{f^1}, \widehat{f^2})$ sa transformée de Fourier. Montrer que $(\widehat{v}_n)$ et $(\widehat{w}_n)$ sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ et dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)^2$.

3. Montrer que $(*)$ est équivalent à

$$(4) \qquad \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{v}_n(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}_n(\xi)}\, d\xi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{v}(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}(\xi)}\, d\xi.$$

4. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, les suites $(\widehat{v}_n(\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{w}_n(\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\widehat{v}(\xi)$ et $\widehat{w}(\xi)$, respectivement.

5. Soit $R > 0$. Notons $B(0,R)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\int_{B(0,R)} \widehat{v}_n(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}_n(\xi)}\, d\xi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{B(0,R)} \widehat{v}(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}(\xi)}\, d\xi.$$

6. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Posons $\xi^\perp = (\xi_2, -\xi_1)$. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on a

$$X = \left(X \cdot \frac{\xi}{|\xi|}\right)\frac{\xi}{|\xi|} + \left(X \cdot \frac{\xi^\perp}{|\xi|}\right)\frac{\xi^\perp}{|\xi|}.$$

Montrer ensuite que pour tout X, Y dans $\mathbb{R}^2$ on a

$$|X \cdot Y| \leq \frac{1}{|\xi|}\Big(|Y|\,|X\cdot\xi| + |X|\,\big|Y\cdot\xi^\perp\big|\Big).$$

7. Montrer que les suites de fonctions $\xi \mapsto \xi \cdot \widehat{v}_n(\xi)$ et $\xi \mapsto \xi^\perp \cdot \widehat{w}_n(\xi)$ sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

8. En déduire que pour tout $R > 0$ on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{|\xi|>R} \widehat{v}_n(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}_n(\xi)}\, d\xi \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et conclure la démonstration de ($*$).

Exercice 3 : le pendule de Kapitsa

Fixons trois nombres strictement positifs a, b, T. Etant donnés $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in]0,1]$. On admet l'existence d'une fonction $\theta_\varepsilon \in C^2([0,T])$ vérifiant

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta_\varepsilon''(t) = \left(a + \dfrac{b}{\varepsilon}\cos\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)\right)\sin(\theta_\varepsilon(t)), \quad t \geqslant 0, \\ \theta_\varepsilon(0) = \alpha, \\ \theta_\varepsilon'(0) = \beta. \end{cases}$$

1. Montrer que θ_ε est solution de (5) si et seulement si $\theta_\varepsilon(0) = \alpha$ et

$$(6) \qquad \theta_\varepsilon'(t) = \beta + b\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin(\theta_\varepsilon(t)) + \int_0^t \left(a\sin(\theta_\varepsilon(s)) - b\sin\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\cos(\theta_\varepsilon(s))\theta_\varepsilon'(s)\right) ds.$$

2. On rappelle l'inégalité de Gronwall : si $u\colon [0,T] \to [0,T]$ est une fonction continue vérifiant

$$u(t) \leq A + B\int_0^t u(s)\, ds,$$

alors $u(t) \leq Ae^{Bt}$ pour tout $t \in [0,T]$.

En appliquant ceci à $u_\varepsilon(t) = |\theta_\varepsilon'(t)|$, en déduire qu'il existe une constante C ne dépendant que de (a, b, α, β, T) telle que,

$$\sup_{\varepsilon\in]0,1]} \max_{t\in[0,T]} \big|\theta_\varepsilon'(t)\big| \leq C.$$

En déduire qu'il existe une constante C', ne dépendant que de (a, b, α, β, T) telle que,

$$\sup_{\varepsilon \in]0,1]} \max_{t \in [0,T]} |\theta_\varepsilon(t)| \leq C'.$$

3. En déduire qu'il existe $\theta \in C^0([0,T]) \cap H^1([0,T])$ telle que l'on peut extraire une sous-suite $(\theta_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ où ε_n tend vers 0, convergeant vers θ fortement dans $C^0([0,T])$ et faiblement dans $H^1([0,T])$.

4. Soit $\psi \in C_0^\infty(]0,T[)$. Montrer que

$$\int_0^T \psi(t)\theta_\varepsilon'(t) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = R_\varepsilon + \int_0^T b\psi(t) \cos^2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \sin(\theta_\varepsilon(t))\, dt,$$

où $R_\varepsilon = O(\varepsilon)$. Indication : utiliser l'équation (5) et une intégration par parties.

5. Montrer que $\cos^2(t/\varepsilon)$ converge faiblement vers la fonction constante $1/2$ lorsque ε tend vers 0. En déduire que

$$\theta_{\varepsilon_n}'(t) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup \frac{b}{2} \sin(\theta(t)) \quad \text{dans } L^2(]0,T[).$$

6. En utilisant (6), montrer que la dérivée au sens faible de θ est donnée par

$$\theta'(t) = \beta + \int_0^t \left(a \sin(\theta(s)) - \frac{b^2}{4} \sin(2\theta(s))\right) ds.$$

7. Montrer que $\theta \in C^2([0,T])$ et θ vérifie

$$\begin{cases} \theta'' = a\sin(\theta(t)) - \dfrac{b^2}{4}\sin(2\theta(t)), \quad t \geqslant 0, \\ \theta(0) = \alpha, \\ \theta'(0) = \beta. \end{cases} \tag{7}$$

En déduire que $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ converge vers θ quand ε tend vers 0 (et pas uniquement la suite extraite $(\theta_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$).