Analyse — Examen Décembre 2017

Aucun document autorisé

Etant donné $n \geqslant 1$, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, On notera $C_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^k à support compact dans Ω.

Exercice 1 – espaces de Sobolev

1. Rappeler la définition de $H^1(\mathbb{R})$ et de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$ et donner un exemple de fonction qui appartient à $H^1(\mathbb{R})$ mais pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. Rappeler la démonstration du résultat suivant : une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi'(x)\, dx \right| \leq C \left\| \phi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

4. Montrer que la fonction indicatrice de $]0, 1[$ n'appartient pas à $H^1(\mathbb{R})$.

5. Rappeler la définition de $H^k(\mathbb{R})$ à l'aide de la transformée de Fourier.

6. Calculer la transformée de Fourier de $\exp(-|x|)$ (indication : découper l'intervalle d'intégration en deux composantes). Est-ce que $\exp(-|x|)$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$? Est-ce que $\exp(-|x|)$ appartient à $H^2(\mathbb{R})$?

7. Démontrer l'inégalité de Caccioppoli : pour tout ouvert ω relativement compact dans Ω, il existe $C > 0$ telle que, si $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de $\Delta u = 0$, alors

$$\int_{\omega} |\nabla u|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} u^2 \, dx.$$

8. Considérons une boule $B \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\varepsilon, n)$ telle que, pour tout $u \in H^1(B)$ vérifiant

$$|\{x \in B\, ;\, u(x) = 0\}| \geqslant \varepsilon\, |B|$$

on ait

$$\int_{B} u^2 \, dx \leq C \int_{B} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Indication : utiliser un résultat d'injection compacte.

Exercice 2 – produit dans les espaces de Sobolev

Soit $n \geqslant 1$, u appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit s un nombre réel dans $]n/2, +\infty[$. On pose

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}.$$

1. Expliquer pourquoi $\|u\|_{H^s}$ est fini pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. Soit u et v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Exprimer $\widehat{uv}$ en fonction de $\widehat{u} * \widehat{v}$.

3. Montrer que pour tout $s \in]n/2, \infty[$, il existe une constante A telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\widehat{u}\|_{L^1} \leq A \, \|u\|_{H^s}.$$

4. Montrer que, pour tout ξ, η dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall s \geqslant 0, \qquad (1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^s \Big\{ (1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} + (1+|\eta|^2)^{s/2} \Big\}.$$

5. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout (u,v) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2$,

$$\|uv\|_{H^s} \leq C \, \|u\|_{H^s} \, \|v\|_{H^s}.$$

Exercice 3 – théorèmes de Banach

Soit X un espace topologique compact. Notons $C^0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ et considérons une norme $\|\cdot\|$ sur $C^0(X)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $(C^0(X), \|\cdot\|)$ est complet ;
- la convergence en norme entraîne la convergence simple : si $\|f_n - f\|$ converge vers 0 alors $|f_n(x) - f(x)|$ converge vers 0 pour tout x dans X.

1. On note E le couple $(C^0(X), \|\cdot\|)$ et Λ_x l'application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\Lambda_x(f) := f(x).$$

Montrer que pour tout x dans E l'application Λ_x est continue.

2. Montrer que $\{ \Lambda_x \mid x \in X \}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\|f\|_\infty := \sup_{y \in X} |f(y)| \leq C \, \|f\|.$$

4. En déduire que la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme $\|f\|_\infty$.

Exercice 3 – convolution et analyse harmonique

Considérons une fonction $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, C^∞ à support compact et telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

et on note J_ε l'opérateur défini par $J_\varepsilon u = \rho_\varepsilon * u$.

1. Démontrer proprement que, pour tout u dans $L^2(\mathbb{R})$, on a $J_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Nous allons redémontrer un cas particulier de l'inégalité de Young. Soit $K(x,y)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\; dx \leq A_1, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\; dy \leq A_2.$$

On note P l'opérateur défini sur $C^0_0(\mathbb{R})$ par $Pu(x) = \displaystyle\int K(x,y)u(y)\, dy$.

a. Montrer que

$$|Pu(x)|^2 \leq A_2 \int |K(x,y)|\, |u(y)|^2\; dy,$$

puis que P se prolonge de façon unique en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

b. En appliquant ce résultat avec K bien choisi, montrer que $\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}$.

4. Montrer que, pour tout u dans $L^2(\mathbb{R})$, $J_\varepsilon u$ converge vers u dans $L^2(\mathbb{R})$ quand ε tend vers 0.

5. Considérons une fonction $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^1, bornée et dont la dérivée est bornée. On note L l'opérateur différentiel défini par $Lu = au'$ où $u' = \partial_x u$. Montrer que L est continu de $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

6. On note $[J_\varepsilon, L]$ le commutateur défini par $[J_\varepsilon, L]u = J_\varepsilon(Lu) - L(J_\varepsilon u)$. Montrer que, pour tout u dans $H^1(\mathbb{R})$, $[J_\varepsilon, L]u$ converge vers 0 quand ε tend vers 0.

7. Vérifier que

$$[J_\varepsilon, L]u(x) = \int \rho'_\varepsilon(x-y)(a(y)-a(x))u'(y)\, dy - \int \rho_\varepsilon(x-y)a'(y)u(y)\, dy.$$

8. Montrer que

$$\left| \int \rho'_\varepsilon(x-y)(a(y)-a(x))u'(y)\, dy \right| \leq C\left(|x\rho'_\varepsilon| * |u|\right).$$

9. En déduire qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in C^1_0(\mathbb{R})$,

$$\|[J_\varepsilon, L]u\|_{L^2} \leq C\, \|u\|_{L^2}.$$

Puis en déduire que $[J_\varepsilon, L]$ s'étend en un opérateur linéaire continu sur $L^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$ et que, $[J_\varepsilon, L]u$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ pour tout u dans $L^2(\mathbb{R})$.