Analyse fonctionnelle — S.Fabre
ENS de Cachan — 2013-2014

Partiel du 9 décembre 2013, durée 3H

**NB** : Le poly et les notes de cours/TDs sont autorisés. On recommande très vivement la précision dans la rédaction. En particulier, donner des références explicites pour TOUS les théorèmes, propositions, définitions utilisés dans les démonstrations.

**Exercice 1** Complétude
Soit $E = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ muni de $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$.
1) Montrer que $(E, \|f\|)$ est un espace de Banach.
2) L'espace $E$ muni de la norme de $L^1$ ou bien de la norme de $L^2$ est-il complet ? Justifier.

**Exercice 2**
On note $\ell^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|2 < \infty\}$ que l'on munit de

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \text{ et } \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|2\right)^{\frac{1}{2}},$$

si $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ sont dans $\ell^2$.
On rappelle que $\ell^2$ est un espace de Hilbert.
Soit $y = (y_n)_n$ une suite de nombres réels fixée.
1) Pour $N \geq 1$, on définit

$$\begin{array}{rcl} T_N : \ell^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & T_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n, \end{array}$$

avec $x = (x_n)_n$. Montrer que $T_N$ est une forme linéaire continue sur $\ell^2$ et calculer $\|T_N\|$.
2) On suppose que la suite $y = (y_n)_n$ vérifie la propriété suivante,

$$\forall x = (x_n)_n \in \ell^2, \qquad \sum_{n\geq 1} |x_n y_n| < \infty.$$

a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $N$, $\|T_N\| \leq C$.
b) En déduire que $y \in \ell^2$.

**Exercice 3** Translatée d'une distribution
1) Soit $h \in \mathbb{R}$. On pose $< \tau_h u, \varphi >=:< u, \tau_{-h}\varphi >$, où $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x - h)$.

Montrer que c'est une distribution sur $\mathbb{R}$ si $u$ en est une.
2) Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on note $U_f$ la distribution associée : $< U_f, \varphi >= \int f\varphi$. Vérifier que pour toute $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\tau_h(U_f) = U_{\tau_h f}$.
3)a) Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall h \in \mathbb{R}, \exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(x-h) = \varphi(x) - h\varphi'(x) + h^2\psi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de

$$\frac{\tau_{-h}u - u}{h},$$

quand $h \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Exercice 4** Calcul de transformée de Fourier
Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on notera

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

1) Soit $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ avec $a > 0$, calculer sa transformée de Fourier. Vérifier que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.
2) En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\sin(ax)}{x} \right)^2 dx.$$

**Exercice 5** Classe de Schwartz et distributions tempérées
On notera $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{S}$ la "classe de Schwartz". (C'est l'espace des fonctions $\varphi$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs réelles ou complexes), telles que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \varphi^{(q)}(x)| < \infty$ ou bien, de façon équivalente, telles que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $|x^p \varphi^{(q)}(x)| \to 0$ quand $|x| \to \infty$.)
Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, on note comme dans le cours,

$$N_p(\varphi) = \max_{0 \le k, q \le p} \|(1 + |x|^2)^{\frac{q}{2}} \varphi^{(k)}\|_\infty.$$

On rappelle que si $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une forme linéaire alors $T$ est continue si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$ tels que

$$|T(\varphi)| \le C N_p(\varphi),$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$.
On note $\mathcal{S}'$ le dual topologique de $\mathcal{S}$. (NB : tout élément de $\mathcal{S}'$ est appelé "distribution tempérée".)
1) Vérifier que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2) Soit $f \in L^p$ où $1 \le p \le \infty$, montrer que $U_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi$ est une distribution tempérée.
3) Donner un exemple de distribution tempérée qui ne s'écrive pas sous la forme

$U_f$ ci-dessus.
4) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $V_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} f\varphi$ est une distribution tempérée.
5) On dit qu'une fonction $f$ est à "croissance lente" (notation : $f$ est FCL), s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|f(x)| \leq C(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}$, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$.
a) Si $f$ est FCL, démontrer que $U_f : \varphi \mapsto \int f\varphi$ est une distribution tempérée. (Justifier l'existence de cette intégrale.)
On dit que $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'$ si pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, $< T_n, \varphi > \to < T, \varphi >$.
b) Démontrer que si $f_n(x)$ est une suite de fonctions qui tend simplement vers $f(x)$ et s'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|f_n(x)| \leq C(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}$, pour tout $n$ et tout $x$, alors $U_{f_n} \to U_f$ dans $\mathcal{S}'$.
6)a) Calculs préliminaires :
- Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $supp(\varphi) \subset [-R, R]$ où $R > 0$, vérifier que $supp(\tau_a\varphi) \subset [a-R, a+R]$ où $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$ et $a \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $\forall M \geq 1$, $\exists C_M > 0$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a-M, a+M]$, $\forall q \in \mathbb{N}$, $(1+|x|^2)^{\frac{q}{2}} \leq C_M(1+|a|^2)^{\frac{q}{2}}$.
b) Démontrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists C = C(p, \varphi) > 0$ tel que

$$N_p(\tau_a(\varphi)) \leq C(1+|a|^2)^{\frac{p}{2}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Conséquences :
c) Montrer que la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ n'est pas une distribution tempérée donc, en particulier, $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (Raisonner par l'absurde.)
d) Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$. On dit que la suite $(a_k)_k$ est à croissance lente si $\exists C > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|a_k| \leq C(1+|k|^2)^{\frac{N_0}{2}}$, $\forall k$.
On pose

$$\Delta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \delta_k.$$

Montrer que le peigne de Dirac $\Delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite $(a_k)_k$ est à croissance lente.