Partiel d'analyse fonctionnelle

M1, ENS Cachan, 2014-15

Durée : 2 heures

Attention: Les documents ne sont pas autorisés pour cet examen.

Exercice 1 :

Soit E un espace topologique. On dit que E est **normal** quand pour tous F_1, F_2 fermés disjoints de E, il existe O_1, O_2 ouverts disjoints de E tels que $F_i \subset O_i$ $(i = 1, 2)$.

1. On suppose que (E, d) est un espace métrique.
a) Soit $A \subset E$. Montrer que

$$\bar{A} = \{ \ x \in E \mid d(x, A) = 0 \ \} \ .$$

b) Soient $F \subset E$ fermé et $K \subset E$ compact tels que $K \cap F = \emptyset$.
On rappelle que par définition,

$$d(K, F) = \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y) \ .$$

Montrer que $d(K, F) > 0$.

c) Trouver un espace (E, d) métrique, et F_1, F_2 fermés de E disjoints tels que $d(F_1, F_2) = 0$

d) Montrer que l'espace métrique (E, d) est normal.

2. Dans cette question, E est un espace topologique séparé.
a) Montrer que pour tous $x \in E$ et $K \subset E$ compact ne contenant pas x, il existe O_1, O_2 ouverts disjoints de E tels que $x \in O_1$, $K \subset O_2$.

b) Montrer que pour tous $K_1, K_2 \subset E$ compacts disjoints de E, il existe O'_1, O'_2 ouverts disjoints de E tels que $K_i \subset O'_i$ $(i = 1, 2)$.

c) Montrer que si E est compact, il est normal.

Exercice 2 : Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$< T, \phi > := \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x\,\sqrt{|x|}}\, dx.$$

On rappelle que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ on note U_f la distribution associée à f.

1. Montrer que cette formule définit une distribution d'ordre ≤ 1 sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $x \mapsto x\,T$ est une distribution associée à un élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

3. Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{x\sqrt{|x|}} \mathbf{1}_{|x| \geqslant \frac{1}{n}} .$$

Calculer la limite de (U_{f_n}) au sens des distributions.

4. On pose

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} .$$

Calculer la dérivée de U_g au sens des distributions.

Exercice 3

Dans l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$, considérons le sous-ensemble F des fonctions $f \in E$ telles qu'il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ non vide et non réduit à un point sur lequel f est monotone.

1 Montrer que E muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

2 Soient $\alpha < \beta$ dans $[0,1]$. On note $F_{[\alpha,\beta]}$ l'ensemble des $f \in E$ qui sont monotones sur $[\alpha, \beta]$.

a) Montrer que $F_{[\alpha,\beta]}$ est fermé dans E.

b) Montrer que $E \setminus F_{[\alpha,\beta]}$ est dense dans E.

3 En déduire que F est d'intérieur vide.