Analyse fonctionnelle — M1 Hadamard
ENS Cachan — 2015-2016

Partiel d'Analyse Fonctionnelle
Durée 3h

NB : Les documents ne sont pas autorisés pour cet examen.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x,y) = |x-y| \quad \text{et} \quad d_f(x,y) = |f(x) - f(y)| \, .$$

1) Montrer que $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d_f) \to (\mathbb{R}, d)$ est continue.

2) Montrer que $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_f)$ est continue si et seulement si f est continue de $(\mathbb{R}, d)$ dans $(\mathbb{R}, d)$.

3) On suppose f surjective. Montrer que $(\mathbb{R}, d_f)$ est complet.

4) On suppose que $(\mathbb{R}, d_f)$ est complet. Montrer que f est surjective.
Indication : par l'absurde, s'il existait $\ell \in \mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R})$, remarquer que l'un au moins des ensembles

$$G = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \ell \, \} \quad , \quad D = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \ell \, \}$$

est non vide ; aboutir à une contradiction en considérant $\mathrm{Sup}(f(G))$ ou $\mathrm{Inf}(f(D))$.

5) En déduire deux espaces métriques E_1 complet et E_2 non complet tels que E_1 et E_2 sont homéomorphes (c'est-à-dire qu'il existe une bijection $\varphi : E_1 \to E_2$ telle que φ et φ^{-1} sont continues).

Exercice 2

1) Soit $\lambda \in \,]-1, +\infty[$, montrer que $x \mapsto x^{\lambda} \mathbb{1}_{x>0}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera T_{λ}.

2) Soit $\lambda \in \,]-1, +\infty[$. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_{\lambda}, \varphi \rangle = \int_0^1 x^{\lambda} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_1^{+\infty} x^{\lambda} \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1} \, .$$

3) Soit $\lambda \in \,]-2, -1[$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle T_{\lambda}, \varphi \rangle = \int_0^1 x^{\lambda} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_1^{+\infty} x^{\lambda} \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1} \, .$$

Montrer que l'on définit ainsi une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre $\leqslant 1$.

4) Soit $\lambda \in \,]-2, -1[$. Calculer la distribution $x T_{\lambda}$.

5) Soit $\lambda \in \,]-1, 0[$. Calculer la dérivée de T_{λ} au sens des distributions.

Exercice 3

On note $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, muni de la norme uniforme. On note aussi $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}) = \overline{\mathscr{C}_c(\mathbb{R})}$ (adhérence pour la norme uniforme).

1) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \, .$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire continue

$$\begin{array}{rccc} T: & L^1(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}_b(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \hat{f} \end{array} .$$

b) Montrer que T est à valeurs dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser la densité dans $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à support compact).

2) Pour $\sigma > 0$, on définit la fonction k_σ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) .$$

On rappelle que $k_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$ et que la transformée de Fourier de k_σ est donnée par

$$\widehat{k_\sigma}(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} \, .$$

Dans cette question, on se donne $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$k_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{k_\sigma}(\xi) e^{i\xi . x} d\xi \, .$$

b) Montrer que la convolution $k_\sigma * f$ est bien définie et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k_\sigma * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{k_\sigma}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi . x} d\xi \, .$$

c) On note $k = k_1$. Montrer que $\widehat{k_\sigma}(\xi) = \hat{k}(\sigma\xi)$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{k_\sigma}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi . x} d\xi \xrightarrow[\sigma \to 0]{} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi . x} d\xi \, .$$

d) En déduire que l'on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \, .$$

3) Posons

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{x^2} \, .$$

a) Montrer que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.
b) Soient $g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{g * h} = \hat{g}\hat{h}$.
c) Montrer que $\widehat{f_n} = \mathbb{1}_{[-n,n]} * \mathbb{1}_{[-1,1]}$.
d) Montrer que $\|f_n\|_1 \to \infty$ quand $n \to \infty$.
e) Avec les questions précédentes, en déduire que $T : L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.