Analyse fonctionnelle | M1 Hadamard
ENS Cachan | Jeudi 3 novembre 2016

Partiel d'Analyse Fonctionnelle
Durée 2h

NB : Le sujet comporte **deux pages**. Les documents ne sont pas autorisés pour cet examen.

Exercice 1

Soient $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On notera $\mathscr{C}([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme uniforme.

1) Pour $f \in \mathscr{C}([a,b])$, on introduit une fonction $\Lambda f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Lambda f(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t) f(s) ds \ .$$

Montrer que Λ est continu de $\mathscr{C}([a,b])$ dans $\mathscr{C}([a,b])$.

2) Montrer que l'une des itérées de Λ est contractante.

3) En déduire qu'il existe une unique fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t) f(s) ds \ .$$

Exercice 2

On considère l'espace topologique produit $E = [-1,1]^{[0,2\pi]}$.

1) Donner une base d'ouverts de E.

2) On définit une suite (f_n) dans E en posant $f_n(x) = \sin(nx)$ pour tout $x \in [0,2\pi]$.
Est-ce que (f_n) admet une sous-suite qui converge dans E ? (On pourra montrer qu'une éventuelle limite est nulle presque partout en considérant les $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\varphi(x)dx$ pour toute $\varphi \in L^2(0,2\pi)$.)

3) On note maintenant $D = [0,2\pi] \cap \mathbb{Q}$ et on considère l'espace topologique produit $F = [-1,1]^D$.
On définit une suite (g_n) dans F en posant $g_n(x) = \sin(nx)$ pour tout $x \in D$.
Est-ce que (g_n) admet une sous-suite qui converge dans F ?

Exercice 3

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n f$ la somme partielle symétrique d'ordre n de la série de Fourier de f définie par

$$S_n f(x) = \sum_{|p| \leqslant n} \hat{f}(p) e^{ipx} \qquad \text{où} \qquad \hat{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ipx} dx \ .$$

On rappelle que $S_n f = f * D_n$ où

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|p| \leqslant n} e^{ipx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \ .$$

1) Calculer la norme de l'application linéaire $S_n : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$.

2) En déduire qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $(S_n f)$ ne converge pas dans $L^1(\mathbb{T})$.

Exercice 4

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $u \in L^2(\Omega)$.
On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque $i = 1, \ldots, d$,

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \qquad \left| \int_\Omega u(x) \partial_i \varphi(x) dx \right| \leqslant C \|\varphi\|_2 \ .$$

Montrer que $u \in H^1(\Omega)$.

Exercice 5

Soit $p < \infty$ et soit $\mathcal{A} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_a f(x) = f(x-a)$.
L'objectif de l'exercice est de montrer que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

(i) $\mathcal{A}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|^p dx = 0$ uniformément par rapport à $f \in \mathcal{A}$,

(iii) $\displaystyle\lim_{a \to 0} \tau_a f = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, uniformément par rapport à $f \in \mathcal{A}$.

1) Montrer que la relative compacité de $\mathcal{A}$ équivaut à sa précompacité.

2) Supposons (i), (ii), et (iii). On fixe (ρ_n) une suite régularisante [1] telle que $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n})$. On se donne aussi $\varepsilon > 0$, $R > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle la définition de la convolution

$$f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \rho_n(y) dy \ .$$

a) Montrer que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), \qquad \|f - f * \rho_n\|_p \leqslant \sup_{|y| \leqslant 1/n} \|f - \tau_y f\|_p \ .$$

b) Notons B la boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de rayon R. Montrer que

$$\{ \ (f * \rho_n)_{|B} \ , \ f \in \mathcal{A} \ \}$$

est relativement compacte dans $\mathscr{C}(B)$.
En déduire qu'il existe un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}$ telles que pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$, il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que

$$\forall x \in B, \quad |(f * \rho_n)(x) - (f_j * \rho_n)(x)| \leqslant \varepsilon \lambda(B)^{-1/p} \ ,$$

où $\lambda(B)$ désigne la mesure de Lebesgue de B.
c) Montrer que $\mathcal{A}$ est relativement compact dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Indication : on pourra remarquer que

$$|f - f_j| \leqslant |f| \mathbf{1}_{B^c} + |f_j| \mathbf{1}_{B^c} + |f - f * \rho_n| + |f_j - f_j * \rho_n| + |f * \rho_n - f_j * \rho_n| \mathbf{1}_B \ .$$

3) (Bonus) Réciproquement, on suppose $\mathcal{A}$ relativement compacte dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
Montrer que $\mathcal{A}$ vérifie les propriétés (i), (ii), (iii).

---

1. c'est-à-dire que (ρ_n) est une suite de fonctions positives de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, d'intégrale 1 et telles que

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{|x|>\delta} \rho_n(x) dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ .$$