Analyse | M1 Hadamard
ENS Paris-Saclay | Jeudi 9 novembre 2017

Partiel d'Analyse
Durée 2h

NB : Le sujet comporte **deux pages**. Les documents ne sont pas autorisés pour cet examen.

Exercice 1 Questions de cours

1) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
Donner une base d'ouverts de la topologie produit sur $E = \prod_{i\in I} E_i$.

2) Énoncer le théorème de point fixe de Brouwer.

3) Énoncer le théorème de Baire (si besoin, redéfinir la notion d'espace de Baire).

4) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Donner la définition de $H^1(\Omega)$ et de son produit scalaire.

Exercice 2

Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction k-lipschitzienne, et $M > 0$ fixé.
On notera $|x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^d$.
Pour $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, on note $\|\varphi\| = \sup_{t\geqslant 0} e^{-Mt}|\varphi(t)|$ et on considère l'espace

$$E = \left\{ \varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mid \|\varphi\| < \infty \right\} .$$

1) Montrer que E est complet.

2) On fixe $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Pour $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, on définit une fonction $\Lambda\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ en posant

$$\Lambda\varphi(t) = y_0 + \int_0^t f(\varphi(s))ds .$$

a) Montrer que pour $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $\|\Lambda\varphi - \Lambda\psi\| \leqslant \frac{k}{M}\|\varphi - \psi\|$. En déduire que $\Lambda(E) \subset E$.
b) Montrer que pour $M > k$, il existe une unique fonction $\varphi \in E$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0) = y_0 \end{cases} .$$

Exercice 3

Pour $f \in L^2(0, 2\pi)$, et tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le coefficient de Fourier

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \ .$$

1) Rappeler pourquoi $f \in H^1(0, 2\pi)$ admet un représentant continu sur $[0, 2\pi]$.
(Justifier brièvement)

2) Montrer que l'injection de $H^1(0, 2\pi)$ dans $\mathscr{C}([0, 2\pi])$ est compacte.

3) On pose $E = \left\{ f \in H^1(0, 2\pi) \mid f(0) = f(2\pi) \right\}$. Montrer que E est fermé dans $H^1(0, 2\pi)$.

4) Soit $f \in E$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.

b) Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$. (On pourra utiliser que deux fonctions $L^1(0, 2\pi)$ ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales presque partout).

5) Soit $f \in L^2(0, 2\pi)$. On considère l'équation différentielle avec conditions de bord périodiques

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} \ .$$

On cherche des solutions au sens faible, c'est-à-dire qu'on cherche $u \in E$ telle que

$$\forall \varphi \in E, \quad \int_0^{2\pi} (u'\varphi' + u\varphi) = \int_0^{2\pi} f\varphi \ .$$

a) Soit $u \in E$. Montrer que u est solution faible si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(u) = \frac{c_n(f)}{1 + n^2} \ .$$

b) On note Tf la solution faible associée au second membre $f \in L^2(0, 2\pi)$.
Montrer que $T : L^2(0, 2\pi) \to H^1(0, 2\pi)$ est une application linéaire continue.

c) Montrer que $T : L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$ est un opérateur compact (c'est-à-dire que l'image par T de la boule unité fermée B de $L^2(0, 2\pi)$ est relativement compacte dans $L^2(0, 2\pi)$).

d) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(I - T)$ est de dimension finie.

e) (Bonus) Calculer F.