Licence 3, Introduction au traitement d'images

Feuille de TP : DFT et Traitement de Signal

Pour ce TP, vous devez télécharger l'archive `TP_audio.zip` à l'adresse

`https://www.math.u-bordeaux.fr/~aleclaire/images_L3/TP_audio.zip`

et décompresser cette archive dans un dossier de votre choix. Dans ce dossier vous trouverez alors deux fichiers de scripts Matlab `exo1.m` et `exo2.m`. Vous devrez alors compléter ces fichiers (aux endroits indiqués XXX).

Exercice 1 Transformée de Fourier Discrète 1D

Dans $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$, on considère les signaux

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la fonction `fft`, calculer $y = \hat{z}$.
2. Calculer $\tilde{z} = \frac{1}{4}\hat{\hat{z}}$. Quel est le lien avec z ?
3. En utilisant la fonction `ifft`, calculer $\check{y}$. Que constate-ton ?
4. En utilisant la fonction `dftmtx`, générer la matrice de Vandermonde-Fourier W_4.
5. Vérifier que $y = W_4 z$ et que $\|\hat{z}\|^2 = 4\|z\|^2$.
6. Vérifier que $W_4^{-1} = \frac{1}{4}W_4^*$.
7. Calculer $\frac{1}{16}W_4^4$ et interpréter. Est-ce que la puissance ponctuelle donne le même résultat ?
8. En utilisant la fonction `eig`, calculer les valeurs propres et vecteurs propres de W_4. Interpréter.
9. Reprendre la question précédente pour W_9.
10. Générer les signaux $\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_{20})$ et $R_2\delta$ (en utilisant la fonction `circshift`).
11. Visualiser leurs spectres en utilisant `plot` avec l'option `'ro'`.
12. Visualiser les parties réelle et imaginaire de leurs DFT centrées en utilisant les fonctions `real` et `imag`.
13. À l'aide des fonctions `abs` et `angle`, visualiser les spectres d'amplitude et de phase de $R_2\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_{20})$.
14. Reconstruire le signal $R_2\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_{20})$ à partir de ses spectres d'amplitude et de phase.
15. En utilisant la fonction `cconv`, calculer la convolution circulaire $z * w$.
16. Vérifier que l'on obtient le même résultat en calculant $\widecheck{\hat{z} \cdot \hat{w}}$

Exercice 2 Traitement du Son

1. Aller à la page https://en.wikipedia.org/wiki/44,100_Hz pour avoir des informations sur l'importance de la fréquence $f_s = 44,1$ KHz dans l'échantillonnage des signaux audio

2. Posons $f_{\text{do}} = 261.63$ Hz, $f_{\text{mi}} = 1.25\ f_{\text{do}}$, $f_{\text{sol}} = 1.5 f_{\text{do}}$ et considérons les signaux

$$y_1(t) = 5\cos(2\pi f_{\text{do}} t), \quad y_2(t) = 3\sin(2\pi f_{\text{mi}} t), \quad y_3(t) = 2\cos(2\pi f_{\text{sol}} t)\ .$$

   Écrire le code pour échantillonner y_1, y_2, y_3 à la fréquence f_s sur une durée de 2 secondes.
   On notera z_1, z_2, z_3 les signaux échantillonnés correspondants.

3. En utilisant la fonction `sound`, écouter les signaux z_1, z_2, z_3 et $z_1 + z_2 + z_3$.

4. Visualiser les spectres de ces signaux.

5. Pour un signal de taille N échantillonné à la fréquence f_s, établir la relation entre la fréquence réelle f (exprimée en Hz) et la fréquence discrète ξ de la DFT (on pourra penser à une onde pure $\exp(2i\pi\xi t)$).
   Vérifier cette relation en comparant le pic observé dans $\widehat{z}_1$ avec la fréquence discrète prédite.

6. Charger les fichiers audio fournis, les écouter, et les visualiser.

7. Visualiser les spectres des signaux DO, MI, SOL. Pouvez-vous interpréter les pics observés ?

8. À l'aide de la fonction `passebande` fournie, générer un filtre passe-bande h autour de la fréquence $f = 785$ Hz. La largeur de la bande pourra être fixée à 10 Hz.

9. Filtrer les signaux DO, MI, SOL avec h et écouter le résultat, en visualisant les spectres.

10. Filtrer le signal *invention* autour de la fréquence f_{do} et écouter le résultat.

11. En utilisant la fonction `passebas`, filtrer le signal *invention* en ne gardant que les fréquences en dessous de f_{mi}. Écouter le résultat. Était-ce prévisible ?

12. Faire de même en ne gardant que les fréquences en dessous de f_{sol}.
    Pourquoi dans ce cas le signal filtré n'est pas exactement le même que le signal original ?

13. Exécuter le code proposé pour écouter la note DO jouée sur trois instruments différents (piano, violon, et saxophone). Comparer les profils de décroissance de la transformée de Fourier.