	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019/2020 **EXAMEN FINAL : SESSION 1** **Parcours : M1 MSS** **Code UE : 4TMS706U** **Épreuve : Probabilités et Statistique** **Date : 17/12/19** **Heure : 14h30** **Durée : 3h** **Documents :** non autorisés **Calculatrice :** non autorisée Épreuve de MM. LECLAIRE et RICHOU	**Collège Sciences et Technologies**

Exercice 1 (4 points)

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Donner l'expression de la densité de la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
2. On considère le modèle statistique de Bernoulli $(\mathcal{B}(\theta))_{\theta \in]0,1[}$, et un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\theta)$.
   a) Rappeler l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ. (On pourra donner la réponse sans justification.)
   b) Quelle est la variance de $\widehat{\theta}_n$?
   c) Pour $\alpha \in]0, 1[$, donner un intervalle de confance asymptotique sur θ de niveau de confiance $1 - \alpha$.
3. Est-ce que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ peut être la covariance d'un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$?
4. On considère le couple (X, Y) de densité $(x, y) \mapsto 2e^{-x-2y}\mathbf{1}_{(x,y)\in]0,+\infty[^2}$ sur $\mathbb{R}^2$.
   a) Quelle est la loi de Y ?
   b) Est-ce que X, Y sont indépendantes ?

Exercice 2 (6 points)

Soit $(X, Y, Z)^T$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_3)$.
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $U = aX + bY$, $V = aY + bZ$ et $W = aX + (a + b)Y + bZ$.

1. Montrer que $(U, V, W)^T$ est un vecteur gaussien et donner sa covariance.
2. Est-ce que $(U, V, W)^T$ admet une densité sur $\mathbb{R}^3$ et si oui la calculer.
3. Calculer la loi de $(U, V)^T$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que U et V soient indépendantes.
5. On considère une suite $(U_n, V_n)^T$ de vecteurs aléatoires i.i.d. de même loi que $(U, V)^T$. Montrer que
$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$
converge en loi vers une limite qu'on précisera.
6. En fait, quelle est la loi de T_n ?

Exercice 3 (8 points)

Pour $\theta > 0$, on définit $\mathbb{P}_\theta$ comme étant la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$p(x;\theta) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Soient X une v.a. de loi $\mathbb{P}_\theta$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de v.a. i.i.d. de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}_\theta[X] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}.$$
2. En déduire un estimateur T_n de θ via la méthode des moments.
Montrer que cet estimateur T_n est fortement consistant.
3. Montrer que $X^2 \sim \mathcal{E}(\theta)$. En déduire $\mathbb{E}_\theta[X^2]$.
4. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
5. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est fortement consistant.
6. On admettra que le modèle $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta>0}$ est régulier.
Calculer l'information de Fisher $I(\theta)$ associée à $\mathbb{P}_\theta$, puis l'information de Fisher $I_n(\theta)$ associée au n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
7. Est-ce que $\frac{1}{\widehat{\theta}_n}$ est un estimateur efficace de $\frac{1}{\theta}$?
8. En utilisant le théorème central limite, donner un intervalle de confiance asymptotique pour $\frac{1}{\theta}$ de niveau de confiance $1-\alpha$ avec $\alpha \in]0,1[$ fixé. Faire de même pour θ.
9. On admet que $\frac{\theta}{\widehat{\theta}_n}$ suit la loi Gamma(n,n) de fonction de répartition notée F_n.
Donner un intervalle de confiance exact pour θ de niveau de confiance $1-\alpha \in]0,1[$.
10. (Bonus) Est-ce que $\frac{n-1}{n}\widehat{\theta}_n$ est un estimateur efficace de θ ?

Exercice 4 (4 points)

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$?
2. Notons f la densité de $\mathcal{N}(0,1)$ et F sa fonction de répartition.
Montrer que pour tout $x > 0$, $1 - F(x) \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$.
3. Fixons $c > 1$. En déduire que p.s., se produit seulement un nombre fini des événements
$$A_n = \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\sqrt{2\ln n} \right\} .$$
4. En déduire que presque sûrement on a $S_n < 2\sqrt{n \ln n}$ à partir d'un certain rang.