Université de Bordeaux
M1 Mathématiques Appliquées et Statistique

Mathématiques
Année 2018/2019

TD6 - Convergence de v.a. - Consistance

Exercice 1.

Soit $\psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ mesurable et soit (U_n) une suite de v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(U_{2k}) \geqslant U_{2k+1} \,, \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases}$$

1. Donner la loi des v.a. Y_k. Sont-elles indépendantes ?

2. En déduire que $\overline{Y}_n = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ converge p.s. vers une limite qu'on déterminera.

Exercice 2.

On considère le modèle géométrique $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{G}(\theta)$ avec $\theta \in]0,1]$.
On cherche à estimer θ à partir d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Calculer un estimateur de θ par la méthode des moments.

2. Cet estimateur est-il consistant ?

Exercice 3.

La loi de Pareto $\mathcal{P}(a,\theta)$, $(a > 0, \theta > 0)$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$x \longmapsto \frac{\theta}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\theta+1} \mathbf{1}_{x \geqslant a} \,.$$

Dans cet exercice, on fixe $a > 0$ et on veut estimer le paramètre $\theta > 0$.
On se donne donc $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{P}(a,\theta)$ et un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que $\mathbb{E}_\theta[|X_1|] < \infty$.

2. Sous cette condition, calculer un estimateur de θ par la méthode des moments.

3. Est-ce que cet estimateur est consistant ?

Exercice 4.

On considère ici le modèle $\mathbb{P}_\theta$ uniforme sur $\{1, 2, \ldots, \theta\}$ avec $\theta \in \mathbb{N}^*$.
On cherche à estimer θ à partir d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Donner un estimateur de θ par la méthode des moments.

2. Est-ce que cet estimateur est consistant ?

3. On suppose qu'on a tiré un 10-échantillon dont les valeurs sont $(1, 4, 8, 2, 10, 3, 7, 2, 9, 4)$.
Calculer l'estimation correspondante de θ et commenter.

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{n^2})$.

1. Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité.

2. Est-ce que $X_n \to 0$ dans L^1 ? dans L^2 ?

3. On suppose que les X_n sont indépendantes. Est-ce que $X_n \to 0$ p.s. ?

Exercice 6.

Soit $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ intégrable.

Soit (U_n) une suite de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0,1]^d$. Posons $X_n = f(U_n)$ et $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que Y_n converge p.s. vers $I = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$.

2. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|f| \leqslant c$ presque partout. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|Y_n - I| > \varepsilon) \leqslant \frac{c^2}{n\varepsilon^2} \, .$$

Exercice 7.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d.

1. Montrer que $\mathbb{E}[|X_1|] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| > t)\, dt$.

2. En déduire que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ équivaut à $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n| > n) < \infty$.

3. Montrer que $\frac{X_n}{n} \to 0$ p.s. si et seulement si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$.