Université de Bordeaux — **Mathématiques**
M1 Mathématiques Appliquées et Statistique — **Année 2018/2019**

TD7 - Convergence en loi

Exercice 1.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}(0, a)$ avec $a > 0$. On pose

$$\begin{aligned} U_n &= \max(X_1, \dots, X_n) \, , \\ V_n &= n(a - U_n) \, . \end{aligned}$$

1. En calculant $\mathbb{P}(|U_n - a| > \varepsilon)$, montrer que $U_n \to a$ p.s.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la limite de $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$?

3. Montrer que (V_n) converge en loi vers une v.a. V dont on calculera la loi.

Exercice 2.

Soit $p_n \in]0, 1[$ telle que $np_n \to \lambda > 0$ quand $n \to \infty$.

1. Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Calculer la fonction caractéristique de X_n.

2. Retrouver ainsi que $X_n \to \mathcal{P}(\lambda)$ en loi.

Exercice 3.

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer que $Y_n = X_n^2$ admet un moment d'ordre 2 et le calculer.

2. Montrer que

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n \to \infty]{\text{p.s.}} \frac{2}{\lambda^2}$$

3. Montrer que $\sqrt{n}(\overline{Y}_n - \frac{2}{\lambda^2})$ converge en loi. Expliciter la limite.

Exercice 4.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $M_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$ puis

$$Z_n = M_n - \frac{\log n}{\lambda} \, .$$

1. Calculer la fonction de répartition de Z_n.

2. Montrer que Z_n converge en loi vers une v.a. Y_λ de fonction de répartition $t \mapsto \exp(-e^{-\lambda t})$.