
TD8 - Intervalles de Confiance

Exercice 1.

Soit $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un modèle statistique sur \mathbb{R} , et soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de \mathbb{P}_θ .

On suppose que $m = \mathbb{E}_\theta[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}_\theta(X_1)$ existent.

Supposons que l'on veut estimer l'espérance m en connaissant σ^2 . Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, donner un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ sur m .
2. En utilisant le théorème central-limite, donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ sur m .
3. Calculer les intervalles précédents pour les valeurs $\alpha = 5\%$, $n = 100$, $\bar{x}_n = 2$, $\sigma^2 = 1$.

Exercice 2.

Considérons le modèle statistique $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$ pour $\theta > 0$.

On considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) de \mathbb{P}_θ .

1. Calculer $m = \mathbb{E}_\theta[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}_\theta(X_1)$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_\theta \left(\frac{|\bar{X}_n - m|}{\sigma} > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

3. En déduire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ sur θ .
4. Donner un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ sur $\frac{1}{\theta}$.

Exercice 3.

Un stock d'un fabricant de pneus comporte 10000 pièces. Pour évaluer le nombre de pièces défectueuses, on tire au hasard 400 pièces dont on constate que 45 sont défectueuses.

1. Expliquer pourquoi l'on peut modéliser approximativement le tirage par une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
2. Expliquer pourquoi l'on peut ici approcher $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale.
3. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 99% pour l'estimation de la proportion de pièces défectueuses. On pourra utiliser que si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $F_Z^-(0.995) \approx 2.57$.

Exercice 4.

Un sondage auprès de 1500 ménages tirés au hasard dans la population française a indiqué que 20% de ceux-ci prévoient d'acheter une nouvelle voiture dans l'année.

En s'inspirant de l'exercice précédent, donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% sur la proportion de ménages souhaitant acheter une nouvelle voiture dans l'année.

Exercice 5.

Soit $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{P}(\theta)$ pour $\theta > 0$ et soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi \mathbb{P}_θ .

1. Montrer que

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

2. En déduire un ICA de niveau $1 - \alpha$ pour l'estimation de θ . On pourra remarquer que chercher θ tel que

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}{\sqrt{\theta}} \right| \leq t$$

revient à résoudre une inéquation du second degré en θ .