Université de Bordeaux **Mathématiques**
M1 Mathématiques Appliquées et Statistique **Année 2018/2019**

TD9 - Vecteurs Gaussiens

Exercice 1.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k.$$

Montrer que A et B sont indépendantes si et seulement si $a.b = 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$.

Exercice 2.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. On pose $U = aX + bY$ et $V = bX - aY$.
Montrer que les variables aléatoires U, V sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 3.

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien centré dans $\mathbb{R}^2$ et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Est-ce que (X_1, X_2) admet une densité sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, la déterminer.

2. Considérons la variable aléatoire réelle $Y = X_2 - aX_1$, où a est un nombre réel quelconque.
Quelle est la loi du couple (X_1, Y) ?

3. Montrer que les variables aléatoires réelles X_1 et Y sont indépendantes si et seulement si $a = 1$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite. Pour tout $a > 0$ on note

$$Y_a = -X\mathbf{1}_{\{|X| \leqslant a\}} + X\mathbf{1}_{\{|X| > a\}}.$$

1. Montrer que Y_a est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite.

2. Montrer que le vecteur (X, Y_a) n'est pas gaussien.

Exercice 5.

On veut estimer le rendement d'un engrais pour la culture du blé. Sur douze parcelles expérimentales, on a trouvé les rendements suivants en tonnes par hectare :

7.7	8.4	7.8	8.2	7.9	8.5	8.4	8.2	7.6	7.8	8.4	8.3

On supposera que ces nombres sont des réalisations d'un loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Donner un intervalle de confiance de niveau 95% du rendement moyen de l'engrais.

2. Donner un intervalle de confiance de niveau 95% sur la variance du rendement.

Exercice 6. Fonction caractéristique de la loi normale

On rappelle que la densité de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ s'écrit $x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

1. Calculer la fonction caractéristique Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
(On pourra montrer que $\Phi'(\xi) + \xi\Phi(\xi) = 0$.)

2. Calculer la fonction caractéristique Ψ de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

3. Montrer que si X, Y sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors

$$X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) .$$

Exercice 7.

On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie tombant sur pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On fixe $r \in \mathbb{N}^*$, et on note X_r l'instant du r-ième succès.
On note $\mathbb{P}_p$ la loi de X_r et on considère le modèle $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_p : p \in]0,1[\}$.
De plus, on se fixe un n-échantillon $(X_{r,1}, \dots, X_{r,n})$ de la loi $\mathbb{P}_p$.

1. Montrer que X_r est à valeurs dans $\{ k \in \mathbb{N}^* \mid k \geqslant r \}$ et que pour $k \geqslant r$ on a

$$\mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

(On admettra que $\mathbb{P}(X_r < \infty) = 1$.)

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$, on a

$$\sum_{k=r}^{+\infty} (k-1)(k-2)\dots(k-r+1)x^{k-r} = \frac{(r-1)!}{(1-x)^r}$$

en posant par convention $(k-1)(k-2)\dots(k-r+1) = 1$ lorsque $r = 1$.

3. En déduire la fonction caractéristique de X_r.

4. Comment appelle-t-on la loi de X_1 ?
Expliquer pourquoi X_r a même loi que $Y_1 + \dots + Y_r$ où les Y_i sont i.i.d. de même loi que X_1.

5. En déduire que

$$\mathbb{E}(X_r) = \frac{r}{p}, \quad \mathrm{Var}(X_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

6. Dans cette question, on suppose que $p = \frac{r}{\lambda + r}$ avec $\lambda > 0$ fixé.
Montrer que $X_r - r$ converge en loi lorsque $r \longrightarrow +\infty$.

7. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}_n$ de p associé au modèle $\mathcal{P}$.

8. Montrer que $\hat{p}_n$ est fortement consistant.

9. Avec la méthode des moments, donner un estimateur fortement consistant $\hat{q}_n$ de $q = \frac{1}{p}$.
Est-ce que $\hat{q}_n$ converge vers q en moyenne quadratique ?

10. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha \in]0,1[$ pour l'estimation de $q = \frac{1}{p}$.
En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour l'estimation de p.

11. Calculer l'information de Fisher du modèle $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in]0,1[}$ (dont on admettra qu'il est régulier).

12. Est-ce que $\hat{q}_n$ est un estimateur efficace de $\frac{1}{p}$?