Université de Bordeaux - M1 MAS 2018–2019
UE : Simulation stochastique et méthodes bayésiennes pour le traitement du signal

TP2 - Calcul de lois a posteriori

Ce TP en R consiste en un code à compléter (remplacer `!XXX!` par ce qu'il faut).

---

1 Modèle Gaussien-Gaussien

On considère le modèle bayésien suivant :

$$\begin{array}{rcl} X_1,\ldots,X_n|\theta & \sim_{iid} & \mathcal{N}(\theta,\sigma^2) \\ \theta & \sim & \mathcal{N}(\mu,\tau^2). \end{array}$$

Dans le code, on pourra utiliser les valeurs $\theta = 1$ et $\sigma^2 = 2$.

Q. 1 *Calculer l'expression de la loi a posteriori* $\pi(\theta|X_1,\ldots,X_n)$.

Q. 2 *En fixant des valeurs des hyperparamètres* μ *et* τ *qui vous semblent appropriées, afficher la densité de la loi a posteriori* $\pi(\theta|X_1,\ldots,X_n)$.

Q. 3 *Superposer sur un même graphique la densité de la loi a posteriori* $\pi(\theta|X_1,\ldots,X_q)$ *pour différentes tailles d'échantillon* $q \in \{1,\ldots,n\}$. *Quelle est l'influence de la taille d'échantillon* q *sur la concentration de la loi a posteriori ?*

Q. 4 *Faites varier les valeurs de* μ *et* τ. *Quelle est l'influence de ces hyperparamètres sur la concentration de la loi a posteriori ?*

2 Modèle Beta-Bernoulli

Q. 5 *Charger le fichier de données* `betabinom` *associé à ce TP, et visualiser son contenu. Comment pouvez-vous modéliser les éléments du vecteur de données* `data` *?*

Q. 6 *Exécuter le code proposé pour tracer la densité de la loi* $Beta(a,b)$ *pour différentes valeurs des paramètres* a *et* b.

Dans la suite, on considère le modèle bayésien suivant

$$\begin{array}{rcl} X_1,\ldots,X_n|\theta & \sim_{iid} & Bernoulli(\theta) \\ \pi(\theta) & \sim & Beta(a,b). \end{array}$$

Q. 7 *Calculer l'expression de la loi a posteriori* $\pi(\theta|X_1,\ldots,X_n)$.

Q. 8 *Pour différentes valeurs du couple de paramètres* (a,b), *représenter, sur un même graphique, la densité de la loi a priori ainsi que la densité de la distribution a posteriori pour* $n = 5, 10, 20, 100, 1000$.

Q. 9 *Proposer une estimation de la valeur du paramètre* θ *pour cet échantillon à partir de l'espérance de la loi a posteriori et le maximum de la loi a posteriori puis la comparer à celle donnée par le maximum de vraisemblance en faisant varier* n.

3 Modèle Gaussien général

On considère les deux modèles bayésiens suivants :

$$
\begin{aligned}
X_1, \ldots, X_n|\theta &\sim_{iid} \mathcal{N}(\theta, \sigma^2) \\
\pi(\theta, \sigma) &\sim \frac{1}{\sigma} \\
\tilde{\pi}_1(\theta|\sigma^2) &\sim \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right) \\
\tilde{\pi}_2(\sigma^2) &\sim IG\left(\frac{\nu}{2}, \frac{s_0^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

où π est un *a priori* non informatif et $\tilde{\pi}$ est un a priori conjugué.

Q. 10 *Calculer les lois* a posteriori $\pi(\theta, \sigma^2|x)$ *et* $\tilde{\pi}(\theta, \sigma^2|x)$.

Q. 11 *Tracer sur un même graphique les densités* a posteriori *non informatives et conjuguées. On pourra faire varier les hyperparamètres* $(\theta_0, n_0, \nu, s_0)$ *et la taille d'échantillon* $q \in \{1, ..., n\}$.

Q. 12 *Générer un échantillon aléatoire de taille* $n = 1000$ *de loi* $\mathcal{N}(1, 1)$.
Étudier l'influence de la loi a priori *et des hyperparamètres pour l'estimation de* μ *et* σ^2 *à l'aide de l'espérance ou du maximum de la loi* a posteriori.