

Coupling from the past

Arthur Leclaire

Université Paris Descartes

Groupe de travail des thésards
et jeunes docteurs
7 mai 2013

Plan de la présentation

- 1 Rappels sur les Chaînes de Markov
- 2 Coupling from the past
 - Applications de transition et coalescence
 - Conditions de coalescence
 - Le cas monotone
- 3 Application aux champs de Gibbs
 - Modèle d'Ising
 - Champ de Gibbs à énergie sous-modulaire

Bibliographie



James Gary Propp and David Bruce Wilson.

Exact sampling with coupled markov chains and applications to statistical mechanics.

Random structures and Algorithms, 9(1-2) :223–252, 1996.



Christian Lantuejoul.

Geostatistical Simulation : Models and Algorithms.

Springer, 2002.

Plan

- 1 Rappels sur les Chaînes de Markov
- 2 Coupling from the past
- 3 Application aux champs de Gibbs

Définition

Soit Ω un espace d'états **fini**.

Définition

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs dans Ω .
On dit que (X_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition Q si pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = Q(x_n, y)$$

pour tous $x_0, \dots, x_n, y \in \Omega$ tels que

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0 .$$

Matrice de transition

Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition Q .
Alors, Q est une matrice vérifiant

$$\forall x, y \in \Omega, \quad Q(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) .$$

Plus généralement,

$$\forall x, y \in \Omega, \quad Q^k(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+k} = y \mid X_n = x) .$$

Irréductibilité

Définition

La chaîne (ou la matrice Q) est dite irréductible si

$$\forall x, y \in \Omega, \exists n, \quad Q^n(x, y) > 0 .$$

Proposition

Pour Ω fini, si la chaîne est irréductible, alors elle est récurrente, c'est-à-dire que presque sûrement, (X_n) visite une infinité de fois tous les états.

Loi invariante

Définition

On dit qu'une loi de probabilité p sur Ω est invariante (ou stationnaire) pour Q si

$$pQ = p \quad \text{i.e.} \quad \forall y \in \Omega, \quad \sum_{x \in \Omega} p(x)Q(x, y) = p(y).$$

Cela revient à dire que

$$X_n \sim p \quad \Longrightarrow \quad X_{n+1} \sim p.$$

Théorème

Pour Ω fini, si la chaîne est irréductible, alors il existe une unique mesure de probabilité invariante.

Apériodicité

Définition

La période de $x \in \Omega$ pour la chaîne (X_n) est

$$d(x) = \text{pgcd}\{n \geq 0 \mid Q^n(x, x) > 0\} .$$

Proposition

Supposons (X_n) irréductible. Alors

- 1 *Tous les points ont la même période $d \geq 1$.*
- 2 *Si $d = 1$, alors*

$$\forall x, y \in \Omega, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad Q^n(x, y) > 0 .$$

On dit dans ce cas que la chaîne est apériodique.

Convergence en loi

Théorème

Pour Ω fini, si (X_n) est irréductible apériodique, et si l'on note p la loi de probabilité invariante, alors quelle que soit la loi initiale de X_0 , on a

$$\forall y \in \Omega, \quad \mathbb{P}(X_n = y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p(y) .$$

Autrement dit,

$$\forall x, y \in \Omega, \quad Q^n(x, y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p(y) .$$

Plan

- 1 Rappels sur les Chaînes de Markov
- 2 Coupling from the past
 - Applications de transition et coalescence
 - Conditions de coalescence
 - Le cas monotone
- 3 Application aux champs de Gibbs

Composition inversée

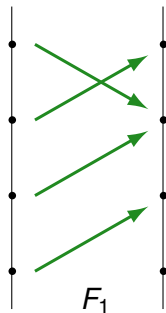


FIGURE: Composition des applications de transition

$$\mathcal{F}_1 = F_1$$

Composition inversée

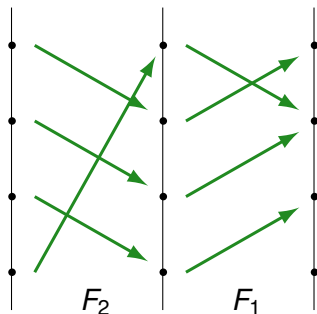


FIGURE: Composition des applications de transition

$$\mathcal{F}_2 = F_1 \circ F_2$$

Composition inversée

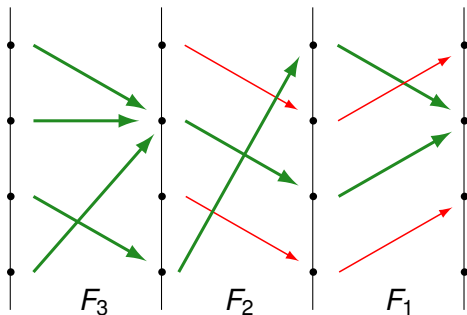


FIGURE: Composition des applications de transition

$$\mathcal{F}_3 = F_1 \circ F_2 \circ F_3$$

Composition inversée

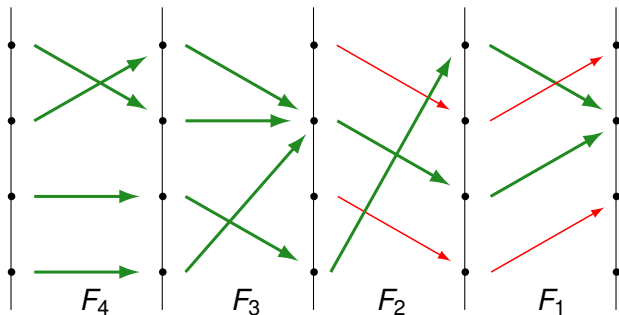


FIGURE: Composition des applications de transition

$$\mathcal{F}_4 = F_1 \circ F_2 \circ F_3 \circ F_4$$

Algorithme CFTP

Initialisation : $n \leftarrow 0$, $\mathcal{F}_0 = \text{Id}$.

Tant que $\#\mathcal{F}_n(\Omega) > 1$,

- Générer F_{n+1} de loi μ .
- Poser $\mathcal{F}_{n+1} = F_1 \circ \dots \circ F_n \circ F_{n+1}$.
- $n \leftarrow n + 1$

Retourner l'unique état de $\mathcal{F}_n(\Omega)$.

FIGURE: Algorithme CFTP

Conditions de coalescence

Au tableau...

Exemple de CFTP monotone

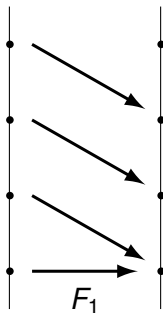


FIGURE: Composition d'applications croissantes

$$\mathcal{F}_1 = F_1$$

Exemple de CFTP monotone

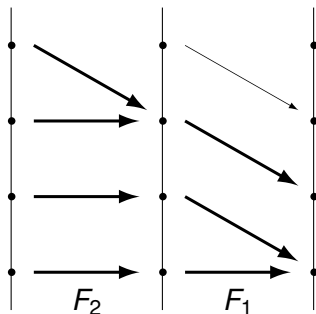


FIGURE: Composition d'applications croissantes

$$\mathcal{F}_2 = F_1 \circ F_2$$

Exemple de CFTP monotone

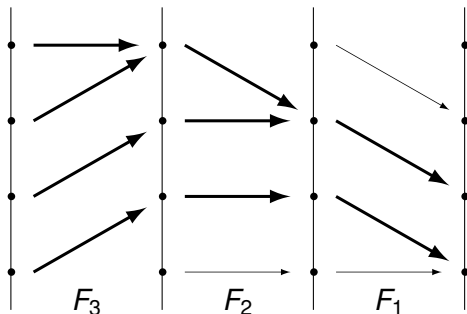


FIGURE: Composition d'applications croissantes

$$\mathcal{F}_3 = F_1 \circ F_2 \circ F_3$$

Exemple de CFTP monotone

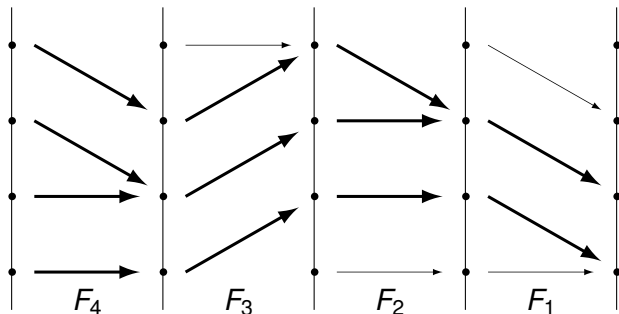


FIGURE: Composition d'applications croissantes

$$\mathcal{F}_4 = F_1 \circ F_2 \circ F_3 \circ F_4$$

Exemple de CFTP monotone

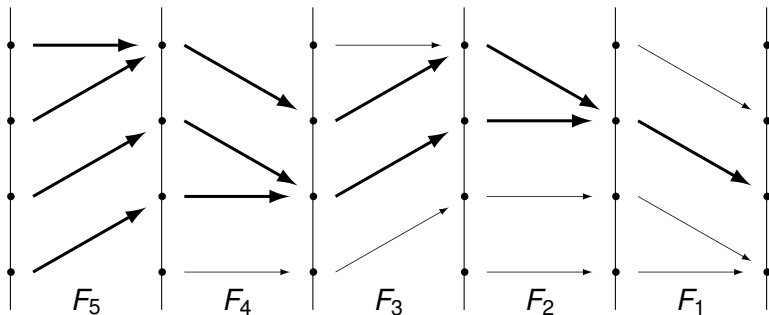


FIGURE: Composition d'applications croissantes

$$\mathcal{J}_5 = F_1 \circ F_2 \circ F_3 \circ F_4 \circ F_5$$

Algorithme CFTP monotone

Initialisation : $n \leftarrow 0$, $\mathcal{F}_0 = \text{Id}$.

Tant que $\mathcal{F}_n(\hat{0}) \neq \mathcal{F}_n(\hat{1})$,

- Générer F_{n+1} de loi μ .
- Poser $\mathcal{F}_{n+1} = F_1 \circ \dots \circ F_n \circ F_{n+1}$.
- $n \leftarrow n + 1$

Retourner l'unique état de $\mathcal{F}_n(\Omega)$.

FIGURE: Algorithme CFTP monotone

Simulation de v.a. binomiales

On veut simuler une v.a. X sur $\{0, \dots, k\}$ de loi

$$p(x) = \binom{k}{x} r^x (1-r)^{k-x} \quad (r \in (0, 1)).$$

On considère la matrice de transition Q défini par

$$Q(x, x-1) = \frac{p(x-1)}{p(x) + p(x-1)} = \frac{(1-r)x}{r(k-x+1) + (1-r)x}$$
$$Q(x, x+1) = \frac{p(x+1)}{p(x) + p(x+1)} = \frac{r(k-x)}{r(k-x) + (1-r)(x+1)}$$
$$Q(x, x) = 1 - Q(x, x-1) - Q(x, x+1).$$

On simule une application de transition F à partir de $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Simulation de v.a. binomiales, algorithme

Initialisation : $N \leftarrow 1$

Faire

- $x \leftarrow 0$
- $y \leftarrow k$
- Pour $n = N, N - 1, \dots, 1$
 - Si $n > N/2$, générer et mémoriser $U_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 - $x \leftarrow F_n(x)$
 - $y \leftarrow F_n(y)$
- $N \leftarrow 2N$

Tant que $x \neq y$

Retourner x

FIGURE: CFTP pour la simulation de v.a. binomiales

Plan

- 1 Rappels sur les Chaînes de Markov
- 2 Coupling from the past
- 3 Application aux champs de Gibbs
 - Modèle d'Ising
 - Champ de Gibbs à énergie sous-modulaire

Echantillonneur de Gibbs

Initialisation de σ quelconque.

On itère les deux étapes suivantes :

- 1 Choix (aléatoire) d'un site i
- 2 On note σ_- (resp. σ_+) la modification de σ faisant passer i à -1 (resp. à $+1$). On génère $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ et on pose

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_- & \text{si } U < \frac{\pi(\sigma_-)}{\pi(\sigma_-) + \pi(\sigma_+)} \\ \sigma_+ & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera F l'application de transition associée à i et U .

On notera G l'application de transition correspondant à un parcours entier de la grille et à des v.a. uniformes $(U(i))_{i \in S}$.

Ising perfect sampling

Initialisation : $N \leftarrow 1$

Faire

- $X \leftarrow -1$
- $Y \leftarrow +1$
- Pour $n = N, N - 1, \dots, 1$
 - Si $n > N/2, \forall i \in S$, générer et mémoriser $U_n(i) \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 - $X \leftarrow G_n(X)$
 - $Y \leftarrow G_n(Y)$
- $N \leftarrow 2N$

Tant que $X \neq Y$

Retourner X

FIGURE: CFTP pour la simulation Ising

Le résultat de Darbon & Sigelle

Soit $S = [1, M] \times [1, N]$ et $V = [0, 255]$.

Considérons un champ de Gibbs $X : S \rightarrow V$ de loi $p(x) = \frac{1}{Z} e^{-U(x)}$.

Théorème (Darbon, Sigelle, 2012)

On suppose que

$$U(x) = \sum_{s \in S} U_1(x_s) + \sum_{s, t \in S} U_2(x_s, x_t)$$

avec U_2 sous-modulaire, c'est-à-dire que pour tous $a, b \in V$,

$$U_2(a + 1, b + 1) + U_2(a, b) \leq U_2(a + 1, b) + U_2(a, b + 1) .$$

Alors, l'échantillonneur de Gibbs associé a des transitions croissantes, et donc on peut simuler ce champ X de manière exacte via CFTP.

Champs $L^2 + TV$

Exemple

$$U(x) = \sum_{s \in S} (x_s - y_s)^2 + \sum_{s \sim t} w_{s,t} |x_s - x_t|$$

où $y : S \rightarrow V$ est une donnée, et où $w_{s,t} \geq 0$.

Pour $w_{s,t} = \lambda$, on obtient

$$U(x) = \|x - y\|^2 + \lambda TV(x).$$

Simus...

Bibliographie



Jérôme Darbon and Marc Sigelle.

Image restoration with discrete constrained total variation part I : Fast and exact optimization.

JMIV, 26(3) :261–276, 2006.



Jérôme Darbon and Marc Sigelle.

Image restoration with discrete constrained total variation part II : Levelable functions, convex priors and non-convex cases.

Journal of Mathematical Imaging and Vision, 26(3) :277–291, 2006.



Christian Lantuejoul.

Geostatistical Simulation : Models and Algorithms.

Springer, 2002.



James Gary Propp and David Bruce Wilson.

Exact sampling with coupled markov chains and applications to statistical mechanics.

Random structures and Algorithms, 9(1-2) :223–252, 1996.

Merci !

MERCI DE VOTRE ATTENTION