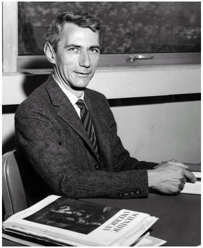
Introduction à la Théorie du Codage

Arthur Leclaire
Centre de Mathématiques et de leur Applications
École Normale Supérieure de Cachan

Institut Notre-Dame
Bourg-la-Reine
Mardi 5 Avril 2016

L'Article Fondateur

A Mathematical Theory of Communication.
Par Claude Shannon.
Bell System Technical Journal,
Volume 27, pages 379–423, 623–656, 1948.

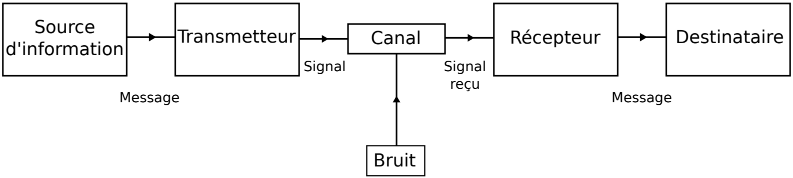


C. Shannon
1916–2001

Cet article a posé les bases de la

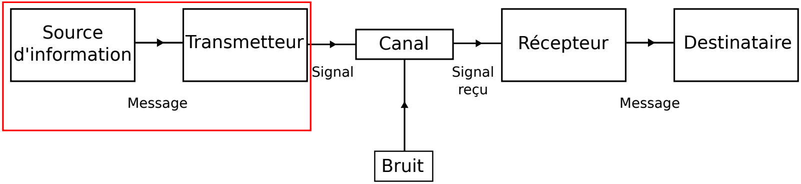
Théorie de l'information et du codage.

Le Modèle de Communication de Shannon



Question fondamentale :
Selon la capacité du canal et le niveau de bruit, à quelle vitesse peut-on transmettre l'information pour un niveau d'erreur donné ?

Le Modèle de Communication de Shannon



Question fondamentale :
Selon la capacité du canal et le niveau de bruit, à quelle vitesse peut-on transmettre l'information pour un niveau d'erreur donné ?

Dans cet exposé, on va se concentrer sur la partie « **Transmission** ».

De Nombreux Signaux

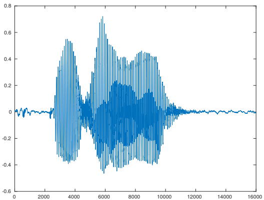
Quelle type d'information veut-on transmettre ?

- Texte

De Nombreux Signaux

Quelle type d'information veut-on transmettre ?

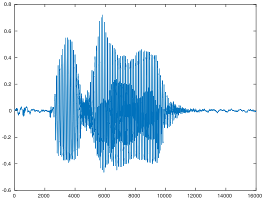
- Texte
- Son

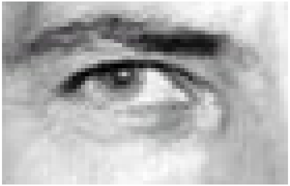


De Nombreux Signaux

Quelle type d'information veut-on transmettre ?

- Texte
- Son
- Images

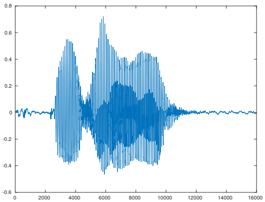


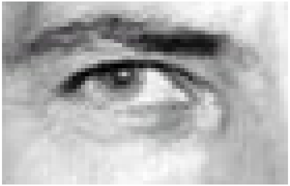


De Nombreux Signaux

Quelle type d'information veut-on transmettre ?

- Texte
- Son
- Images
- Vidéos





$\rightarrow$ Tous ces signaux peuvent être représentés par des suites de nombres, et même par des suites de chiffres 0 et 1.

Plan de la Présentation

Plan

Compter sur une main

Jusqu'à combien pouvez-vous compter avec une seule main ?

Compter sur une main

Jusqu'à combien pouvez-vous compter avec une seule main ?

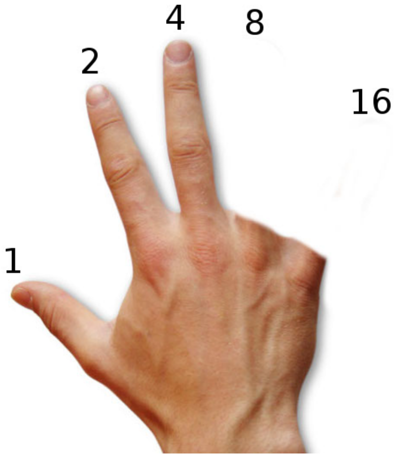
$\longrightarrow$ Jusqu'à 5.

Compter sur une main

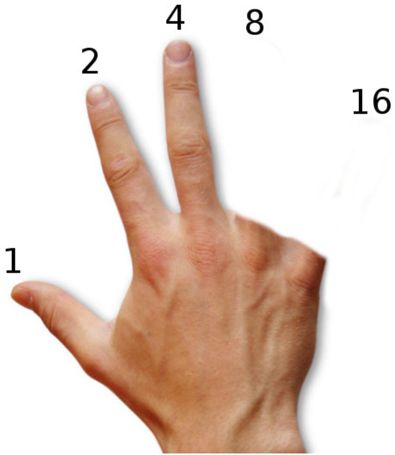
Jusqu'à combien pouvez-vous compter avec une seule main ?

⟶ ~~Jusqu'à 5.~~ NON ! Jusqu'à 31 (au moins)

Exemple

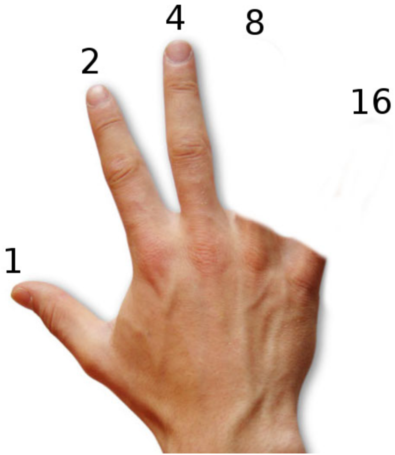


Exemple



$$= 1 + 2 + 4$$

Exemple



$$= 1 + 2 + 4 = 7$$

Exemple

Exemple

$$= 1 + 2 + 8 + 16$$

Exemple

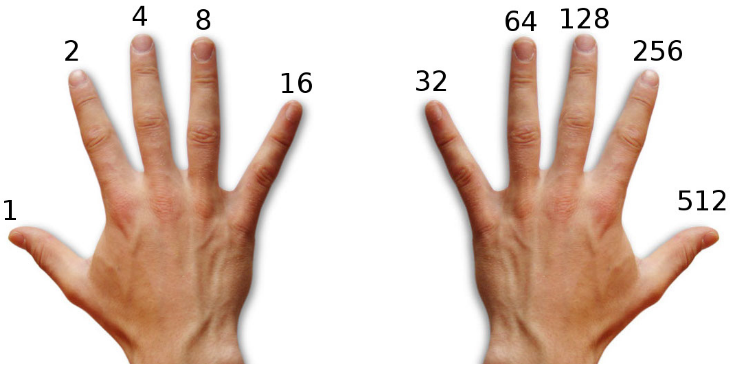
$$= 1 + 2 + 8 + 16 = 1 + 10 + 16 = 27$$

Compter sur deux mains

Jusqu'à combien pouvez-vous compter avec deux mains ?

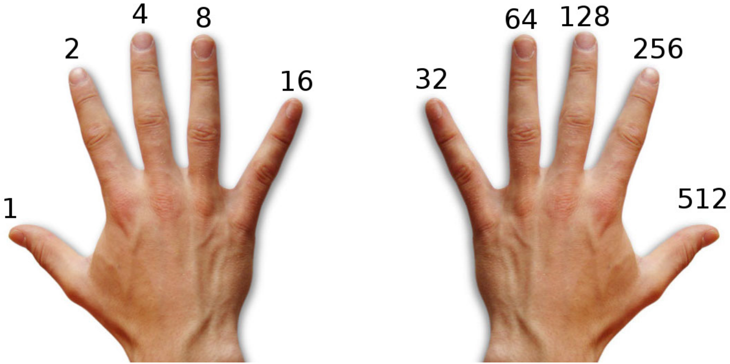
Compter sur deux mains

Jusqu'à combien pouvez-vous compter avec deux mains ?



Compter sur deux mains

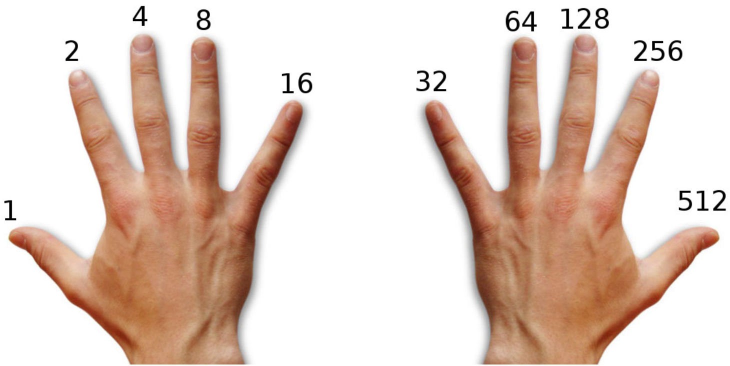
Jusqu'à combien pouvez-vous compter avec deux mains ?



$\longrightarrow$ Jusqu'à $1 + 2 + 4 + \ldots + 512$

Compter sur deux mains

Jusqu'à combien pouvez-vous compter avec deux mains ?



$\longrightarrow$ Jusqu'à $1 + 2 + 4 + \ldots + 512 = \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \dfrac{1024 - 1}{1} = 1023.$

(somme des termes d'une suite géométrique !)

À vous de jouer !

Votre jeu : Représenter le nombre 19 avec votre main droite.

À vous de jouer !

Votre jeu : Représenter le nombre 19 avec votre main droite.

Indice : $19 = 16 + 2 + 1$.

À vous de jouer !

Votre jeu : Représenter le nombre 19 avec votre main droite.

Indice : $19 = 16 + 2 + 1$.

Réponse

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

1 0 0 1 1

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

1 0 0 1 1

1×16

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

1 0 0 1 1

$1 \times 16 \quad + \quad 0 \times 8$

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

1	0	0	1	1

$1 \times 16 \quad + \quad 0 \times 8 \quad + \quad 0 \times 4$

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

1	0	0	1	1

$1 \times 16 \quad + \quad 0 \times 8 \quad + \quad 0 \times 4 \quad + \quad 1 \times 2$

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

1		0		0		1		1
1×16	$+$	0×8	$+$	0×4	$+$	1×2	$+$	1×1

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & \\ 1 \times 16 & + & 0 \times 8 & + & 0 \times 4 & + & 1 \times 2 & + & 1 \times 1 & = & 19 \end{array}$$

Écriture binaire

Associons à chaque doigt la valeur 0 ou 1, avec le pouce à droite.

1		0		0		1		1	
1×16	$+$	0×8	$+$	0×4	$+$	1×2	$+$	1×1	$= 19$

Ainsi, l'écriture binaire de 19 **est** 10011**.**

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
	1010

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
	111011101

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
477	111011101

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
477	111011101

Comparaison des deux systèmes :

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
477	111011101

Comparaison des deux systèmes :

37 (décimal) $\longrightarrow 3 \times 10 + 7$
100101 (binaire) $\longrightarrow 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 37$

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
477	111011101

Comparaison des deux systèmes :

37 (décimal) $\longrightarrow 3 \times 10 + 7$
100101 (binaire) $\longrightarrow 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 37$

273 (décimal) $\longrightarrow 200 + 70 + 3 = 2 \times 100 + 7 \times 10 + 3$
10001001 (binaire) $\longrightarrow 256 + 16 + 1 = 273$

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
477	111011101

Comparaison des deux systèmes :

37 (décimal) $\longrightarrow 3 \times 10 + 7$
100101 (binaire) $\longrightarrow 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 37$

273 (décimal) $\longrightarrow 200 + 70 + 3 = 2 \times 100 + 7 \times 10 + 3$
10001001 (binaire) $\longrightarrow 256 + 16 + 1 = 273$

Conclusion :

Le binaire prend plus de place sur le papier !

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
477	111011101

Comparaison des deux systèmes :

37 (décimal) $\longrightarrow 3 \times 10 + 7$
100101 (binaire) $\longrightarrow 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 37$

273 (décimal) $\longrightarrow 200 + 70 + 3 = 2 \times 100 + 7 \times 10 + 3$
10001001 (binaire) $\longrightarrow 256 + 16 + 1 = 273$

Conclusion :

Le binaire prend plus de place sur le papier !
Oui ! mais l'ordinateur aime les 0 et les 1.

Représentation des entiers naturels en binaire

Il y a une correspondance entre les écritures binaires et décimales.

Décimal	Binaire
3	11
10	1010
100	1100100
477	111011101

Comparaison des deux systèmes :

37 (décimal) $\longrightarrow 3 \times 10 + 7$
100101 (binaire) $\longrightarrow 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 37$

273 (décimal) $\longrightarrow 200 + 70 + 3 = 2 \times 100 + 7 \times 10 + 3$
10001001 (binaire) $\longrightarrow 256 + 16 + 1 = 273$

Conclusion :

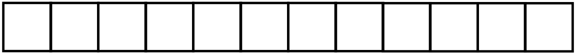
Le binaire prend plus de place sur le papier !

Oui ! mais l'ordinateur aime les 0 et les 1.

Un chiffre binaire est appelé un « **bit** » (*binary digit*).

Compter avec *n* chiffres binaires

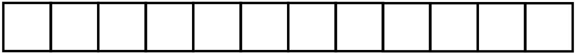
Imaginons que l'on dispose de *n* chiffres binaires.



Combien de nombres puis-je représenter avec *n* chiffres binaires ?

Compter avec n chiffres binaires

Imaginons que l'on dispose de n chiffres binaires.



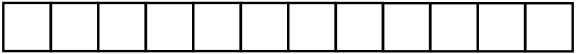
Combien de nombres puis-je représenter avec n chiffres binaires ?

Réponse :

La case à droite correspond à $1 = 2^0$, celle à gauche à 2^{n-1}.

Compter avec *n* chiffres binaires

Imaginons que l'on dispose de *n* chiffres binaires.



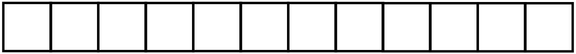
Combien de nombres puis-je représenter avec *n* chiffres binaires ?

Réponse :
La case à droite correspond à $1 = 2^0$, celle à gauche à 2^{n-1}.
Le plus grand nombre entier représenté est donc

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \ .$$

Compter avec *n* chiffres binaires

Imaginons que l'on dispose de n chiffres binaires.



Combien de nombres puis-je représenter avec n chiffres binaires ?

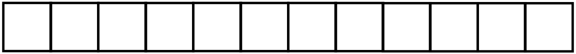
Réponse :
La case à droite correspond à $1 = 2^0$, celle à gauche à 2^{n-1}.
Le plus grand nombre entier représenté est donc

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \ .$$

Je peux donc représenter les nombres entiers de 0 à $2^n - 1$, c'est-à-dire 2^n nombres.

Compter avec n chiffres binaires

Imaginons que l'on dispose de n chiffres binaires.



Combien de nombres puis-je représenter avec n chiffres binaires ?

Réponse :
La case à droite correspond à $1 = 2^0$, celle à gauche à 2^{n-1}.
Le plus grand nombre entier représenté est donc

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \ .$$

Je peux donc représenter les nombres entiers de 0 à $2^n - 1$, c'est-à-dire 2^n nombres.
Autre méthode (plus rapide !) : 2 choix par case, et donc

$$\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \quad \text{possibilités au total.}$$

Dans l'autre sens maintenant

Supposons que l'on veuille coder tous les nombres entiers de 0 à P.
De combien de bits d'information aurais-je besoin ?

Dans l'autre sens maintenant

Supposons que l'on veuille coder tous les nombres entiers de 0 à P.
De combien de bits d'information aurais-je besoin ?

Réponse :

On prend n suffisamment grand pour que

$$2^n - 1 \geqslant P.$$

Trouver le plus petit n revient à encadrer

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n.$$

Avec n bits, je peux aller jusque $2^n - 1$ et a fortiori jusque P.

Dans l'autre sens maintenant

Supposons que l'on veuille coder tous les nombres entiers de 0 à P. De combien de bits d'information aurais-je besoin ?

Réponse :

On prend n suffisamment grand pour que

$$2^n - 1 \geqslant P.$$

Trouver le plus petit n revient à encadrer

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n.$$

Avec n bits, je peux aller jusque $2^n - 1$ et a fortiori jusque P.

Exemple : Je veux coder les entiers jusque $P = 95$. J'encadre

$$2^6 = 64 < P + 1 = 96 \leqslant 128 = 2^7.$$

Avec 7 chiffres binaires, je peux compter jusqu'à 95.

Trouver la bonne valeur de n

Problème : comment retrouver le n à partir de 2^n ?

Exemple :

$$64 = 2^?$$

Trouver la bonne valeur de n

Problème : comment retrouver le n à partir de 2^n ?

Exemple :

$$64 = 2^?$$

Réponse : Il existe une fonction f qui fait exactement ça !

Trouver la bonne valeur de n

Problème : comment retrouver le n à partir de 2^n ?

Exemple :

$$64 = 2^?$$

Réponse : Il existe une fonction f qui fait exactement ça !

x	$f(x)$	Explication
8	3	$8 = 2^3$
64	6	$64 = 2^6$
2^{78}	78	
1	0	$1 = 2^0$

Trouver la bonne valeur de n

Problème : comment retrouver le n à partir de 2^n ?

Exemple :

$$64 = 2^?$$

Réponse : Il existe une fonction f qui fait exactement ça !

x	$f(x)$	Explication
8	3	$8 = 2^3$
64	6	$64 = 2^6$
2^{78}	78	
1	0	$1 = 2^0$

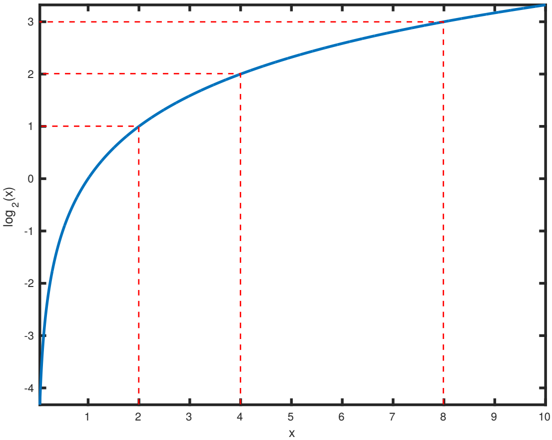
Pratique : Cette fonction a déjà été étudiée et tabulée.

Logarithme en base 2

Elle s'appelle le logarithme en base 2 et se note

$$\log_2 : x \mapsto \log_2(x) \ .$$

C'est une fonction strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.



Utilisation dans notre problème

On cherchait l'unique entier *n* tel que

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n \; .$$

Utilisation dans notre problème

On cherchait l'unique entier *n* tel que

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n \ .$$

Comme $\log_2$ est strictement croissante, cela équivaut à

$$\log_2(2^{n-1}) < \log_2(P + 1) \leqslant \log_2(2^n) \ ,$$

Utilisation dans notre problème

On cherchait l'unique entier n tel que

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n \ .$$

Comme $\log_2$ est strictement croissante, cela équivaut à

$$\log_2(2^{n-1}) < \log_2(P+1) \leqslant \log_2(2^n) \ ,$$

c'est-à-dire à

$$n - 1 < \log_2(P+1) \leqslant n.$$

Utilisation dans notre problème

On cherchait l'unique entier n tel que

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n \,.$$

Comme $\log_2$ est strictement croissante, cela équivaut à

$$\log_2(2^{n-1}) < \log_2(P+1) \leqslant \log_2(2^n) \,,$$

c'est-à-dire à

$$n - 1 < \log_2(P+1) \leqslant n.$$

La solution est le plus petit entier supérieur à $\log_2(P+1)$.

Utilisation dans notre problème

On cherchait l'unique entier n tel que

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n \ .$$

Comme $\log_2$ est strictement croissante, cela équivaut à

$$\log_2(2^{n-1}) < \log_2(P+1) \leqslant \log_2(2^n) \ ,$$

c'est-à-dire à

$$n - 1 < \log_2(P+1) \leqslant n.$$

La solution est le plus petit entier supérieur à $\log_2(P+1)$.

Exemples :

· Pour $P = 95$, la calculette donne $\log_2(P+1) \approx 6.59$. On retrouve donc bien la valeur $n = 7$.

Utilisation dans notre problème

On cherchait l'unique entier n tel que

$$2^{n-1} < P + 1 \leqslant 2^n \; .$$

Comme $\log_2$ est strictement croissante, cela équivaut à

$$\log_2(2^{n-1}) < \log_2(P+1) \leqslant \log_2(2^n) \; ,$$

c'est-à-dire à

$$n - 1 < \log_2(P+1) \leqslant n.$$

La solution est le plus petit entier supérieur à $\log_2(P+1)$.

Exemples :

· Pour $P = 95$, la calculette donne $\log_2(P+1) \approx 6.59$. On retrouve donc bien la valeur $n = 7$.

· $P = 60000 \; \rightarrow \; \log_2(P+1) \approx 15.87 \; \rightarrow n = 16$.

Plan

Qu'est-ce qu'un code efficace ?

Considérons les 26 lettres de l'alphabet plus l'espace

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \_$$

À chaque lettre on associe un nombre entre 0 et 26.

Qu'est-ce qu'un code efficace ?

Considérons les 26 lettres de l'alphabet plus l'espace

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \_$$

À chaque lettre on associe un nombre entre 0 et 26.
Comme

$$2^4 = 16 < 27 \leqslant 32 = 2^5 ,$$

on peut coder les lettres de l'alphabet sur 5 bits.

Qu'est-ce qu'un code efficace ?

Considérons les 26 lettres de l'alphabet plus l'espace

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \_$$

À chaque lettre on associe un nombre entre 0 et 26.
Comme

$$2^4 = 16 < 27 \leqslant 32 = 2^5 ,$$

on peut coder les lettres de l'alphabet sur 5 bits.

Exemples :

$$a \longrightarrow 0 \longrightarrow 00000$$

$$f \longrightarrow 5 \longrightarrow 00101$$

$$w \longrightarrow 22 \longrightarrow 10110$$

Qu'est-ce qu'un code efficace ?

Considérons les 26 lettres de l'alphabet plus l'espace

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \_$$

À chaque lettre on associe un nombre entre 0 et 26.
Comme

$$2^4 = 16 < 27 \leqslant 32 = 2^5 ,$$

on peut coder les lettres de l'alphabet sur 5 bits.

Exemples :

$$a \longrightarrow 0 \longrightarrow 00000$$

$$f \longrightarrow 5 \longrightarrow 00101$$

$$w \longrightarrow 22 \longrightarrow 10110$$

Dans le langage, certaines lettres sont utilisées plus fréquemment.

Qu'est-ce qu'un code efficace ?

Considérons les 26 lettres de l'alphabet plus l'espace

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \_$$

À chaque lettre on associe un nombre entre 0 et 26.
Comme

$$2^4 = 16 < 27 \leqslant 32 = 2^5,$$

on peut coder les lettres de l'alphabet sur 5 bits.

Exemples :

$$a \longrightarrow 0 \longrightarrow 00000$$

$$f \longrightarrow 5 \longrightarrow 00101$$

$$w \longrightarrow 22 \longrightarrow 10110$$

Dans le langage, certaines lettres sont utilisées plus fréquemment.

Question : Peut-on en déduire un codage plus efficace ?

Qu'est-ce qu'une source ?

Définition

Une source est une loi de probabilité sur un ensemble de symboles.

Qu'est-ce qu'une source ?

Définition

Une source est une loi de probabilité sur un ensemble de symboles.

Exemple 1 :

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Qu'est-ce qu'une source ?

Définition

Une source est une loi de probabilité sur un ensemble de symboles.

Exemple 1 :

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Exemple de signal émis par cette source :

aaaccababcbaaaaabbaaaaaabddaaccbbabaaacaabdbbadbba

Qu'est-ce qu'une source ?

Définition

Une source est une loi de probabilité sur un ensemble de symboles.

Exemple 1 :

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Exemple de signal émis par cette source :

aaaccababcbaaaaabbaaaaaabddaaccbbabaaacaabdbbadbba

Exemple 2 : Dans le cas de la langue française, on pourrait estimer une loi de probabilité sur l'alphabet entier.

Qu'est-ce qu'une source ?

Définition

Une source est une loi de probabilité sur un ensemble de symboles.

Exemple 1 :

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Exemple de signal émis par cette source :

$$aaaccababcbaaaaabbaaaaaabddaaccbbabaaacaabdbbadbba$$

Exemple 2 : Dans le cas de la langue française, on pourrait estimer une loi de probabilité sur l'alphabet entier.

Symbole x_i	e	a	s	i	t	...	k
Probabilité p_i	0.171	0.081	0.079	0.076	0.072	...	0.00049

Codes et Mots-codes

On considère une source

Symboles	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Probabilités	p_1	p_2	$\dots$	p_k

Définition

- Étant donné une source, un **code** associe à chaque symbole x_i un « mot-code » formé de 0 et de 1.

Codes et Mots-codes

On considère une source

Symboles	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Probabilités	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Définition

- Étant donné une source, un **code** associe à chaque symbole x_i un « mot-code » formé de 0 et de 1.
- La longueur du mot-code associé à x_i est notée ℓ_i.
- La **longueur moyenne du code** est

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i = p_1 \ell_1 + p_2 \ell_2 + \ldots + p_k \ell_k \ .$$

Codes et Mots-codes

On considère une source

Symboles	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Probabilités	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Définition

- Étant donné une source, un **code** associe à chaque symbole x_i un « mot-code » formé de 0 et de 1.
- La longueur du mot-code associé à x_i est notée ℓ_i.
- La **longueur moyenne du code** est

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i = p_1 \ell_1 + p_2 \ell_2 + \ldots + p_k \ell_k \ .$$

- Un code est dit **préfixe** si aucun mot-code ne commence par un autre mot-code.

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$

Code préfixe

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$

Code préfixe

Code B

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 10 \\ c & \longrightarrow & 11 \\ d & \longrightarrow & 101 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 1,625$

Code non préfixe

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$

Code préfixe

Code B

$$\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 10 \\ c & \longrightarrow & 11 \\ d & \longrightarrow & 101 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 1,625$

Code non préfixe

Code C

$$\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & 000 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 01 \\ d & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2.625$

Code préfixe

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A	Code B	Code C
$a \longrightarrow 00$	$a \longrightarrow 0$	$a \longrightarrow 000$
$b \longrightarrow 01$	$b \longrightarrow 10$	$b \longrightarrow 001$
$c \longrightarrow 10$	$c \longrightarrow 11$	$c \longrightarrow 01$
$d \longrightarrow 11$	$d \longrightarrow 101$	$d \longrightarrow 1$
Longueur moyenne $= 2$	Longueur moyenne $= 1,625$	Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe	Code non préfixe	Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.
Exemple : Décodons avec le code C la séquence

0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$a \longrightarrow 00$
$b \longrightarrow 01$
$c \longrightarrow 10$
$d \longrightarrow 11$

Longueur moyenne $= 2$
Code préfixe

Code B

$a \longrightarrow 0$
$b \longrightarrow 10$
$c \longrightarrow 11$
$d \longrightarrow 101$

Longueur moyenne $= 1,625$
Code non préfixe

Code C

$a \longrightarrow 000$
$b \longrightarrow 001$
$c \longrightarrow 01$
$d \longrightarrow 1$

Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.
Exemple : Décodons avec le code C la séquence

0 0 0|0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1
a

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A	Code B	Code C
$a \longrightarrow 00$	$a \longrightarrow 0$	$a \longrightarrow 000$
$b \longrightarrow 01$	$b \longrightarrow 10$	$b \longrightarrow 001$
$c \longrightarrow 10$	$c \longrightarrow 11$	$c \longrightarrow 01$
$d \longrightarrow 11$	$d \longrightarrow 101$	$d \longrightarrow 1$
Longueur moyenne $= 2$	Longueur moyenne $= 1,625$	Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe	Code non préfixe	Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.

Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\underbrace{0\ 0\ 0}_{a}|\underbrace{0\ 1}_{c}|0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$
Code préfixe

Code B

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 10 \\ c & \longrightarrow & 11 \\ d & \longrightarrow & 101 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 1,625$
Code non préfixe

Code C

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 000 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 01 \\ d & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.
Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\underset{a}{0\ 0\ 0}|\underset{c}{0\ 1}|\underset{b}{0\ 0\ 1}|1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$

Code préfixe

Code B

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 10 \\ c & \longrightarrow & 11 \\ d & \longrightarrow & 101 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 1,625$

Code non préfixe

Code C

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 000 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 01 \\ d & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2.625$

Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.
Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\underbrace{0\ 0\ 0}_{a}|\underbrace{0\ 1}_{c}|\underbrace{0\ 0\ 1}_{b}|\underbrace{1}_{d}|0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A	Code B	Code C
$a \longrightarrow 00$	$a \longrightarrow 0$	$a \longrightarrow 000$
$b \longrightarrow 01$	$b \longrightarrow 10$	$b \longrightarrow 001$
$c \longrightarrow 10$	$c \longrightarrow 11$	$c \longrightarrow 01$
$d \longrightarrow 11$	$d \longrightarrow 101$	$d \longrightarrow 1$
Longueur moyenne $= 2$	Longueur moyenne $= 1,625$	Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe	Code non préfixe	Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.

Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\underset{a}{0\ 0\ 0}|\underset{c}{0\ 1}|\underset{b}{0\ 0\ 1}|\underset{d}{1}|\underset{a}{0\ 0\ 0}|0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$a \longrightarrow 00$
$b \longrightarrow 01$
$c \longrightarrow 10$
$d \longrightarrow 11$

Longueur moyenne $= 2$
Code préfixe

Code B

$a \longrightarrow 0$
$b \longrightarrow 10$
$c \longrightarrow 11$
$d \longrightarrow 101$

Longueur moyenne $= 1,625$
Code non préfixe

Code C

$a \longrightarrow 000$
$b \longrightarrow 001$
$c \longrightarrow 01$
$d \longrightarrow 1$

Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.
Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\underset{a}{0\,0\,0}|\underset{c}{0\,1}|\underset{b}{0\,0\,1}|\underset{d}{1}|\underset{a}{0\,0\,0}|\underset{b}{0\,0\,1}|0\,1\,0\,1\,1\,1\,1$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A	Code B	Code C
$a \longrightarrow 00$	$a \longrightarrow 0$	$a \longrightarrow 000$
$b \longrightarrow 01$	$b \longrightarrow 10$	$b \longrightarrow 001$
$c \longrightarrow 10$	$c \longrightarrow 11$	$c \longrightarrow 01$
$d \longrightarrow 11$	$d \longrightarrow 101$	$d \longrightarrow 1$
Longueur moyenne $= 2$	Longueur moyenne $= 1,625$	Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe	Code non préfixe	Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.

Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\begin{array}{c} 0\ 0\ 0|0\ 1|0\ 0\ 1|1|0\ 0\ 0|0\ 0\ 1|0\ 1|0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ a \quad c \quad b \quad d \quad a \quad b \quad c \end{array}$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$
Code préfixe

Code B

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 10 \\ c & \longrightarrow & 11 \\ d & \longrightarrow & 101 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 1,625$
Code non préfixe

Code C

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 000 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 01 \\ d & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.
Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\ 0\ 0 | & 0\ 1 | & 0\ 0\ 1 | & 1 | & 0\ 0\ 0 | & 0\ 0\ 1 | & 0\ 1 | & 0\ 1 | & 1\ 1\ 1 \\ a & c & b & d & a & b & c & c & \end{array}$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$

Code préfixe

Code B

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 10 \\ c & \longrightarrow & 11 \\ d & \longrightarrow & 101 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 1,625$

Code non préfixe

Code C

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 000 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 01 \\ d & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2.625$

Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.

Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\begin{array}{cccccccccc} 0\,0\,0| & 0\,1| & 0\,0\,1| & 1| & 0\,0\,0| & 0\,0\,1| & 0\,1| & 0\,1| & 1| & 1\,1 \\ a & c & b & d & a & b & c & c & d & \end{array}$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$a \longrightarrow 00$
$b \longrightarrow 01$
$c \longrightarrow 10$
$d \longrightarrow 11$

Longueur moyenne $= 2$
Code préfixe

Code B

$a \longrightarrow 0$
$b \longrightarrow 10$
$c \longrightarrow 11$
$d \longrightarrow 101$

Longueur moyenne $= 1,625$
Code non préfixe

Code C

$a \longrightarrow 000$
$b \longrightarrow 001$
$c \longrightarrow 01$
$d \longrightarrow 1$

Longueur moyenne $= 2.625$
Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.
Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\underset{a}{0\,0\,0}|\underset{c}{0\,1}|\underset{b}{0\,0\,1}|\underset{d}{1}|\underset{a}{0\,0\,0}|\underset{b}{0\,0\,1}|\underset{c}{0\,1}|\underset{c}{0\,1}|\underset{d}{1}|\underset{d}{1}|1$$

Exemples de codes

Source

Symbole x_i	a	b	c	d
Probabilité p_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Code A

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 00 \\ b & \longrightarrow & 01 \\ c & \longrightarrow & 10 \\ d & \longrightarrow & 11 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2$

Code préfixe

Code B

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 0 \\ b & \longrightarrow & 10 \\ c & \longrightarrow & 11 \\ d & \longrightarrow & 101 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 1,625$

Code non préfixe

Code C

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 000 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 01 \\ d & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Longueur moyenne $= 2.625$

Code préfixe

Avec un code préfixe, on peut décoder à la volée.

Exemple : Décodons avec le code C la séquence

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0\,0\,0 | & 0\,1 | & 0\,0\,1 | & 1 | & 0\,0\,0 | & 0\,0\,1 | & 0\,1 | & 0\,1 | & 1 | & 1 | & 1 \\ a & c & b & d & a & b & c & c & d & d & d \end{array}$$

Un algorithme de codage efficace

Principe :

• On classe les probabilités d'apparition dans des intervalles.

• Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ on attribue à x_i un mot de longueur n.

• On attribue les mots-codes dans l'ordre, en commençant par les symboles moints probables.

Exemple :

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.5	a	
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$	0.25	b	
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.125	c	
	0.125	d	

Un algorithme de codage efficace

Principe :

• On classe les probabilités d'apparition dans des intervalles.

• Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ on attribue à x_i un mot de longueur n.

• On attribue les mots-codes dans l'ordre, en commençant par les symboles moints probables.

Exemple :

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.5	a	
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$	0.25	b	
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.125	c	000
	0.125	d	001

Un algorithme de codage efficace

Principe :

• On classe les probabilités d'apparition dans des intervalles.
• Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ on attribue à x_i un mot de longueur n.
• On attribue les mots-codes dans l'ordre, en commençant par les symboles moints probables.

Exemple :

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.5	a	
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$	0.25	b	01
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.125	c	000
	0.125	d	001

Un algorithme de codage efficace

Principe :

• On classe les probabilités d'apparition dans des intervalles.

• Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ on attribue à x_i un mot de longueur n.

• On attribue les mots-codes dans l'ordre, en commençant par les symboles moints probables.

Exemple :

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.5	a	1
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$	0.25	b	01
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.125	c	000
	0.125	d	001

Un algorithme de codage efficace

Principe :

- On classe les probabilités d'apparition dans des intervalles.
- Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ on attribue à x_i un mot de longueur n.
- On attribue les mots-codes dans l'ordre, en commençant par les symboles moints probables.

Exemple :

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.5	a	1
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$	0.25	b	01
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.125	c	000
	0.125	d	001

On obtient un code préfixe de longueur moyenne

$$0.5 \times 1 + 0.25 \times 2 + 0.125 \times 3 + 0.125 \times 3 = 1.75$$

Autre exemple

Source

Symbole x_i	a	b	c	d	r
Probabilité p_i	0.52	0.15	0.10	0.08	0.15

Autre exemple

Source

Symbole x_i	a	b	c	d	r
Probabilité p_i	0.52	0.15	0.10	0.08	0.15

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.52	a	
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$			
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.15	b	
	0.15	r	
$[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}[$	0.10	c	
	0.08	d	

Autre exemple

Source

Symbole x_i	a	b	c	d	r
Probabilité p_i	0.52	0.15	0.10	0.08	0.15

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.52	a	
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$			
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.15	b	
	0.15	r	
$[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}[$	0.10	c	0000
	0.08	d	0001

Autre exemple

Source

Symbole x_i	a	b	c	d	r
Probabilité p_i	0.52	0.15	0.10	0.08	0.15

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.52	a	
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$			
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.15	b	001
	0.15	r	010
$[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}[$	0.10	c	0000
	0.08	d	0001

Autre exemple

Source

Symbole x_i	a	b	c	d	r
Probabilité p_i	0.52	0.15	0.10	0.08	0.15

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.52	a	1
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$			
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.15	b	001
	0.15	r	010
$[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}[$	0.10	c	0000
	0.08	d	0001

Autre exemple

Source

Symbole x_i	a	b	c	d	r
Probabilité p_i	0.52	0.15	0.10	0.08	0.15

Intervalles	Probabilités	Symboles	Mots-codes
$[\frac{1}{2}, 1]$	0.52	a	1
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$			
$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	0.15	b	001
	0.15	r	010
$[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}[$	0.10	c	0000
	0.08	d	0001

On obtient un code préfixe de longueur moyenne

$$0.52 \times 1 + 0.15 \times 3 + 0.10 \times 4 + 0.08 \times 4 + 0.15 \times 3 = 2.14$$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} \text{a} & \longrightarrow & 1 \\ \text{b} & \longrightarrow & 001 \\ \text{c} & \longrightarrow & 0000 \\ \text{d} & \longrightarrow & 0001 \\ \text{r} & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} \text{a} & \longrightarrow & 1 \\ \text{b} & \longrightarrow & 001 \\ \text{c} & \longrightarrow & 0000 \\ \text{d} & \longrightarrow & 0001 \\ \text{r} & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$1|0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$

a

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 1 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 0000 \\ d & \longrightarrow & 0001 \\ r & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$\underset{a}{1}|\underset{b}{0\ 0\ 1}|0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} \text{a} & \longrightarrow & 1 \\ \text{b} & \longrightarrow & 001 \\ \text{c} & \longrightarrow & 0000 \\ \text{d} & \longrightarrow & 0001 \\ \text{r} & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$1 | 0\ 0\ 1 | 0\ 1\ 0 | 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$

a *b* *r*

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} \text{a} & \longrightarrow & 1 \\ \text{b} & \longrightarrow & 001 \\ \text{c} & \longrightarrow & 0000 \\ \text{d} & \longrightarrow & 0001 \\ \text{r} & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$1|0\ 0\ 1|0\ 1\ 0|1|0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$

a b r a

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 1 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 0000 \\ d & \longrightarrow & 0001 \\ r & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$1|0\ 0\ 1|0\ 1\ 0|1|0\ 0\ 0\ 0|1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$

$a \quad b \quad r \quad a \quad c$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 1 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 0000 \\ d & \longrightarrow & 0001 \\ r & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$\begin{array}{l} 1|0\ 0\ 1|0\ 1\ 0|1|0\ 0\ 0\ 0|1|0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ a \quad b \quad\ r \quad a \quad\ c \quad a \end{array}$$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 1 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 0000 \\ d & \longrightarrow & 0001 \\ r & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$\begin{array}{l} 1|0\ 0\ 1|0\ 1\ 0|1|0\ 0\ 0\ 0|1|0\ 0\ 0\ 1|1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ a \quad b \quad r \quad a \quad c \quad a \quad d \end{array}$$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} \text{a} & \longrightarrow & 1 \\ \text{b} & \longrightarrow & 001 \\ \text{c} & \longrightarrow & 0000 \\ \text{d} & \longrightarrow & 0001 \\ \text{r} & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$1|0\ 0\ 1|0\ 1\ 0|1|0\ 0\ 0\ 0|1|0\ 0\ 0\ 1|1|0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$$

$$a \quad b \quad r \quad a \quad c \quad a \quad d \quad a$$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{a} & \longrightarrow & 1 \\ \mathrm{b} & \longrightarrow & 001 \\ \mathrm{c} & \longrightarrow & 0000 \\ \mathrm{d} & \longrightarrow & 0001 \\ \mathrm{r} & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$\begin{array}{l} 1|0\ 0\ 1|0\ 1\ 0|1|0\ 0\ 0\ 0|1|0\ 0\ 0\ 1|1|0\ 0\ 1|0\ 1\ 0\ 1 \\ a\quad b\quad r\quad a\quad c\quad a\quad d\quad a\quad b \end{array}$$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 1 \\ b & \longrightarrow & 001 \\ c & \longrightarrow & 0000 \\ d & \longrightarrow & 0001 \\ r & \longrightarrow & 010 \end{array}$$

Décodez la séquence

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1| & 0\ 0\ 1| & 0\ 1\ 0| & 1| & 0\ 0\ 0\ 0| & 1| & 0\ 0\ 0\ 1| & 1| & 0\ 0\ 1| & 0\ 1\ 0| & 1 \\ a & b & r & a & c & a & d & a & b & r & a \end{array}$$

À vous de décoder !

On prend le code obtenu à l'instant :

$$
\begin{array}{ccc}
\text{a} & \longrightarrow & 1 \\
\text{b} & \longrightarrow & 001 \\
\text{c} & \longrightarrow & 0000 \\
\text{d} & \longrightarrow & 0001 \\
\text{r} & \longrightarrow & 010
\end{array}
$$

Décodez la séquence

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
1 & 0\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0 & 1 & 0\ 0\ 0\ 0 & 1 & 0\ 0\ 0\ 1 & 1 & 0\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0 & 1 \\
a & b & r & a & c & a & d & a & b & r & a
\end{array}
$$

25 bits pour 11 lettres !

Mesure d'efficacité

Étudions la longueur moyenne obtenue avec l'algorithme précédent.

Mesure d'efficacité

Étudions la longueur moyenne obtenue avec l'algorithme précédent.

Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ alors $\ell_i = n$.

Mesure d'efficacité

Étudions la longueur moyenne obtenue avec l'algorithme précédent.

Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ alors $\ell_i = n$.

Aussi, $n - 1 < \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant n$,

Mesure d'efficacité

Étudions la longueur moyenne obtenue avec l'algorithme précédent.

Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ alors $\ell_i = n$.

Aussi, $n - 1 < \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant n$, et donc

$$\log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \ell_i = n < \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) + 1 .$$

Mesure d'efficacité

Étudions la longueur moyenne obtenue avec l'algorithme précédent.

Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ alors $\ell_i = n$.

Aussi, $n - 1 < \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant n$, et donc

$$\log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \ell_i = n < \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) + 1 \,.$$

En multipliant par p_i et en sommant sur tous les i, on obtient

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) + p_i$$

Mesure d'efficacité

Étudions la longueur moyenne obtenue avec l'algorithme précédent.

Si $2^{n-1} < \frac{1}{p_i} \leqslant 2^n$ alors $\ell_i = n$.

Aussi, $n - 1 < \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant n$, et donc

$$\log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \ell_i = n < \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) + 1 \, .$$

En multipliant par p_i et en sommant sur tous les i, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) + p_i \\ = 1 + \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) \, .\end{aligned}$$

La limite entropique

Définition

On appelle entropie de la source le nombre

$$H(p) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right).$$

La limite entropique

Définition

On appelle entropie de la source le nombre

$$H(p) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right) \quad .$$

On vient de montrer que pour l'algorithme de codage précédent,

$$H(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < H(p) + 1 \ .$$

La limite entropique

Définition

On appelle entropie de la source le nombre

$$H(p) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) \qquad .$$

On vient de montrer que pour l'algorithme de codage précédent,

$$H(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < H(p) + 1 \ .$$

Exemple : Dans l'exemple « abracadabra », on a $H(p) \approx 1.94$.
On a bien

$$H(p) \leqslant 2.14 < H(p) + 1 \ .$$

La limite entropique

Définition

On appelle entropie de la source le nombre

$$H(p) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i \quad .$$

On vient de montrer que pour l'algorithme de codage précédent,

$$H(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < H(p) + 1 \ .$$

Exemple : Dans l'exemple « abracadabra », on a $H(p) \approx 1.94$.
On a bien

$$H(p) \leqslant 2.14 < H(p) + 1 \ .$$

Le premier théorème de Shannon

Théorème

Étant donnée une source,

1. *On peut trouver un code préfixe tel que* $\sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < H(p) + 1$.

Le premier théorème de Shannon

Théorème

Étant donnée une source,

1. *On peut trouver un code préfixe tel que* $\sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < H(p) + 1$.
2. *La longueur moyenne de n'importe quel code préfixe vérifie*

$$H(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i \ .$$

Le premier théorème de Shannon

Théorème

Étant donnée une source,

1. *On peut trouver un code préfixe tel que* $\sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < H(p) + 1$.
2. *La longueur moyenne de n'importe quel code préfixe vérifie*

$$H(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i \ .$$

3. *En encodant des groupes de symboles, on peut atteindre une longueur moyenne arbitrairement proche de* $H(p)$.

Remarque : La borne est mauvaise lorsque $H(p)$ est grand.

Le premier théorème de Shannon

Théorème

Étant donnée une source,

1. *On peut trouver un code préfixe tel que* $\sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i < H(p) + 1$.
2. *La longueur moyenne de n'importe quel code préfixe vérifie*

$$H(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ell_i \ .$$

3. *En encodant des groupes de symboles, on peut atteindre une longueur moyenne arbitrairement proche de* $H(p)$*.*

Remarque : La borne est mauvaise lorsque $H(p)$ est grand.
Le maximum est atteint pour la source uniforme $p_i = \frac{1}{k}$ sur k symboles, alors

$$H(p) = \sum_i p_i \times \log_2(k) = \log_2(k) \ .$$

Plan

La redondance du langage

- Si l'on code un texte en français, nous pouvons comprendre un texte sans lire toutes les lettres.

C t exp sé e t b c p t p l ng !

La redondance du langage

- Si l'on code un texte en français, nous pouvons comprendre un texte sans lire toutes les lettres.

C t | exp sé | e t | b c p | t p | l ng !

La redondance du langage

- Si l'on code un texte en français, nous pouvons comprendre un texte sans lire toutes les lettres.

Cet | exposé | est | beaucoup | trop | long !

La redondance du langage

- Si l'on code un texte en français, nous pouvons comprendre un texte sans lire toutes les lettres.

Cet | exposé | est | beaucoup | trop | long !

Il y a donc une certaine **redondance** à exploiter !

La redondance du langage

• Si l'on code un texte en français, nous pouvons comprendre un texte sans lire toutes les lettres.

Cet | exposé | est | beaucoup | trop | long !

Il y a donc une certaine **redondance** à exploiter !
$\rightarrow$ Codage de sources avec mémoire.

La redondance du langage

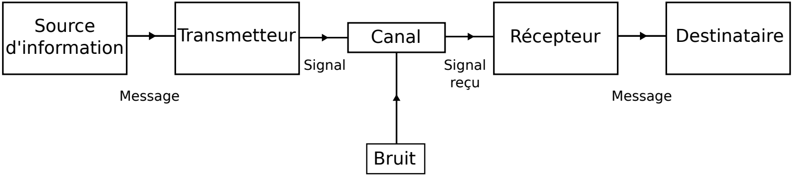
- Si l'on code un texte en français, nous pouvons comprendre un texte sans lire toutes les lettres.

Cet | exposé | est | beaucoup | trop | long !

Il y a donc une certaine **redondance** à exploiter !
$\rightarrow$ Codage de sources avec mémoire.

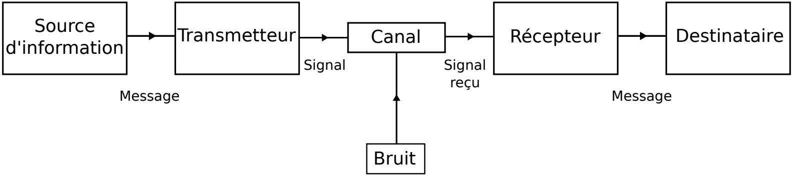
- Autre application : la complétion d'image (*inpainting*).

Retour au schéma de Shannon



Comment gérer les perturbations sur le canal ?

Retour au schéma de Shannon



Comment gérer les perturbations sur le canal ?

Réponse : Transmettre des bits de vérification !

Merci !

Questions ?

Vous pouvez me contacter par mail :

`Arthur.Leclaire@cmla.ens-cachan.fr`

Ma page web où je présente mes travaux :

`www.math-info.univ-paris5.fr/~aleclair/`

MERCI DE VOTRE ATTENTION !