Sujet 5: Programmation quadratique; Détermination des prix et la gestion des revenues

MSE3113: Outils et logiciels pour l'optimisation

Andrew J. Miller

Dernière mise au jour: December 7, 2011

Dans ce sujet...

1. Programmation non-linéaire
   - Une (très petite) introduction
   - La programmation quadratique
2. Programmation quadratique par Xpress
   - Informations utiles
   - Exemple
3. Applications de la programmation quadratique
   - Affectation quadratique
   - Détermination des prix et gestion des revenues

1. Programmation non-linéaire
   - Une (très petite) introduction
   - La programmation quadratique
2. Programmation quadratique par Xpress
   - Informations utiles
   - Exemple
3. Applications de la programmation quadratique
   - Affectation quadratique
   - Détermination des prix et gestion des revenues

Formulation

On peut formuler un programme linéaire dans une de deux manières équivalentes:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.à.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.à.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i, \forall i \\ & x_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

On peut ainsi définir une formulation générale pour les programmes **non**-linéaires:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.à.} \quad & g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Très générale...mais aussi très difficile à résoudre.

Logiciels

Depuis peu de temps, des logiciels les plus utilisés pour l'optimisation commencent à avoir les capacités pour résoudre un sous-ensemble de ces problèmes.

Pour la grande plupart des problèmes dans ce sous-ensemble, il faut que les fonctions qui définissent les contraintes et l'objective soient **convexes**.

De plus en plus, les logiciels peuvent (en principe) résoudre des problèmes convexes s'ils contiennent aussi des spécifications que des variables soient entières.

Si on peut résoudre la relaxation continue, on peut (en principe) résoudre le problème en variables entières par "branch-and-bound" en résolvant une relaxation continue à chaque nœud de l'arbre de branch-and-bound.

Formulation

Programmes linéaires:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.à.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.à.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i, \forall i \\ & x_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

Programmes quadratiques:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + x^T Q x \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_j c_j x_j + \sum_j \sum_k q_{jk} x_j x_k \\ \text{s.à.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i, \forall i \\ & x_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

Rémarquez que la seule différence se trouve dans la *fonction objective*.

Ce qu'il faut savoir pour résoudre des programmes quadratiques

La fonction objective est-elle convexe?

Convexité des fonctions: dérivées

Fonctions d'une variable: La fonction est convexe ssi la deuxième dérivée est toujours non-negative.

fonctions des multiples variables: Il faut considérer la matrice dite *Hessian*, qui comporte toutes les deuxièmes dérivées partielles.

La fonction $f(x) : \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^1$ est convexe ssi sa Hessian $\nabla_2 f(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est toujours positive semi-definie.

Compliqué. Vous allez apprendre beaucoup plus dans l'avenir. Maintenant, nous rémarquerons que

1. $\nabla_2 f(x) = 2Q$ est toujours vrai pour les problèmes quadratiques.
2. Il y quelques faits simples sur les fonctions convexes qui nous seront utiles.

Convexités des fonctions: faits utiles

1. Les fonctions linéaires sont toujours convexes.
2. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe.
3. Les **sommes** des fonctions convexes sont toujours convexes. (**Attention!** Pas les différences, non plus les produits!)
4. Si $f(y)$ est convexe et $g(x)$ est convexe, alors $h(x) = f(g(x))$ est aussi convexe.

Avec ces quatre faits, on peut analyser beaucoup de fonctions assez complexes.

1. Programmation non-linéaire
   - Une (très petite) introduction
   - La programmation quadratique

2. Programmation quadratique par Xpress
   - Informations utiles
   - Exemple

3. Applications de la programmation quadratique
   - Affectation quadratique
   - Détermination des prix et gestion des revenues

1. Programmation non-linéaire
   - Une (très petite) introduction
   - La programmation quadratique
2. Programmation quadratique par Xpress
   - Informations utiles
   - Exemple
3. Applications de la programmation quadratique
   - Affectation quadratique
   - Détermination des prix et gestion des revenues

Nouveau bibliothèque, nouvelle syntaxe

Pour résoudre des programmes quadratiques avec Xpress, **il faut**

- incluire la bibliothèque "mmquad";
- définir la fonction objective comme un élement "qexp";
- vérifier que la fonction objective soit
  - convexe (si on minimise);
  - concave (= convexe * -1) (si on maximise).

Algorithmes d'Xpress

Pour résoudre un programme quadratique, le meilleur méthode est celui dit de "barrière".

Il exists aussi un algorithme simplexe pour les programmes quadratiques.
Cet algorithme est le meilleur méthode pour "re-résoudre" un programme quadratique.
Cet algorithme facilite la recherche par **branch-and-bound** pour les programmes quadratiques en variables entières.

1. Programmation non-linéaire
   - Une (très petite) introduction
   - La programmation quadratique
2. Programmation quadratique par Xpress
   - Informations utiles
   - Exemple
3. Applications de la programmation quadratique
   - Affectation quadratique
   - Détermination des prix et gestion des revenues

Une petite programme quadratique

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^T x + x^T Q x \\
\text{s.à.} \quad & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

où

$$
c = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

Questions

Comment est-ce qu'on sait que l'objectif est convexe?

Le produit des matrices $x^T Qx$, c'est quoi ici?

1. Programmation non-linéaire
   - Une (très petite) introduction
   - La programmation quadratique
2. Programmation quadratique par Xpress
   - Informations utiles
   - Exemple
3. Applications de la programmation quadratique
   - Affectation quadratique
   - Détermination des prix et gestion des revenues

1. Programmation non-linéaire
   - Une (très petite) introduction
   - La programmation quadratique
2. Programmation quadratique par Xpress
   - Informations utiles
   - Exemple
3. Applications de la programmation quadratique
   - Affectation quadratique
   - Détermination des prix et gestion des revenues

Le problème d'Ajax

Maintenant,

- il faut satisfaire exactement la demande;
- les coûts unitaires de production sont les mêmes.

Nouveaux données

La demande pour chaque produit est une fontionne du prix:

$$d_i = b_i - m_i p_i,$$

où $b = [440, 600, 1200]$ et $m = [0.4, 0.5, 0.6]$.

La différence la plus importante entre cette situation et la première est que, ici, **les prix** sont eux aussi **des variables**.

Le problème d'Ajax : une modification

Et si on ajoutait...

- ...des coûts fixes sont $[2000, 3000, 5000]$...

Le problème d'Ajax : une modification

Et si on ajoutait encore ...

- ...la restriction que si on produit un bien, il faut produire au minimum 35 unités de ce bien.

A souvenir

- En principe, tout ce que peuvent faire les logiciels pour les programmes linèaires (avec ou sans des spécifications entiéres) ils peuvent aussi faire pour les programmes convexes et quadratiques.
    - "En principe" $=$ Ils sont moins performants en pratique dans la résolution des problèmes non-linéaires.
- Il faut prendre soin...
    - ...d'utiliser la bonne bibliothèque et la bonne syntaxe;
    - ...de vérifier que les fonctions quadratiques soient *convexes*.
- Une application importante de la programmation quadratique: problèmes où
    - les revenues unitaires dépendent sur les prix et la demande; **et**
    - la demande elle aussi dépend directement sur les prix.