Sujet 1: Introduction; Programmation Stochastique

MSE3313: Optimisation Stochastiqe

Andrew J. Miller

Dernière mise au jour: October 10, 2011

Dans ce sujet...

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

Optimisation

Les outils de l'optimisation sont important parce qu'ils peuvent donner de l'aide indispensable aux procéssus de décision.

Optimisation déterministe

On suppose qu'on a une connaissance exacte de tous les données. Par exemple, considérons la formulation classique d'une programme linéaire:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

($b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, et x est le vecteur de n variables).

Souvent, cette supposition implique une connaissance certaine de l'avenir.

Cette supposition n'est évidemment pas réaliste. Mais parfois le modèle résultant s'approche á la réalité assez suffisament pour donner de l'aide efficace.

Mais pas toujours.

Exemple

Planification du réseau et localisation des dépôts capacités:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i f_i x_i + \sum_{i,k} c_{ik} z_{ik} + \sum_k t_k u_k \\
\text{soumis à} \quad & \sum_i z_{ik} + u_k \geq d_k, \forall k \\
& \sum_k z_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \\
& z_{ik}, \forall i, k; u_k \geq 0, \forall i, k; x_i \in \{0, 1\}, \forall i
\end{aligned}
$$

x_i: la décision de construire/ne pas construire un dépôt à site i.
z_{ik}: quantité de transports du site i au client k.
u_k: quantité de *transports d'urgence* au client k : à utiliser seulement si nous n'avons pas assez de capacité pour satisfaire à la demande par des transports de nos usines.

Données aléatoires ou inconnues

Il faut souvenir que les paramètres b, c, et A contient souvent des approximations des données aléatoires ou inconnues. Par exemple, parmi leurs éléments peuvent être des suivants:

- demandes des clients
- capacités des usines ou de lignes de fabrication
- characteristiques dépendantes du météo (montant de l'eau, durée de trajet/vol, etc.)
- revenues, prix, ou performances des investissements

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

Programmation stochastique

En effet, c'est l'application de la programmation mathématique aux problèmes ayants des données qui ne sont pas détérministes, mais qui peuvent être décrites par une *distribution*.

Cette approche implique

- l'approximation des éléments aléatoires par des scénarios
- la classification des décisions par étape (premier ou deuxième)
- une application des outils dont vous avez déjà une connaissance (e.g., programmation linéaire, programation en nombres entiers, etc.)

Programmation par contraintes probabilistes

Il faut satisfaire à des contraintes avec une certaine probabilité p (par exemple, $p = 0.95$).

Plusieurs approches

- Il faut satisfaire à *toutes* les contraintes ensemble avec la probabilité $p = 0.95$.
- Pour chaque contrainte, il faut y satisfaire avec la probabilité $p = 0.95$.
- etc.

A utiliser lorsque l'on ne peut pas prendre des décisions importantes pour réagir aux éléments aléatoires.

Optimisation robuste

C'est une approche qui applique des idées de la programmation mathématique aux problèmes non-déterministes où on ne peut pas utiliser une distribution.

Le "cas pire limité": on définit une "ensemble d'incertitude avec bornes"; et on optimise en considérant le pire de ce qui peut arriver dans cet ensemble.

Programmation dynamique stochastique

Une extension de l'outil classique de programmation dynamique, modifié pour considérer les cas les résultats des actions ne sont pas déterministes mais suivent une distribution.
L'état à temps t dépend sur

1. l'état à $t+1$;
2. l'action choisie à t; et
3. une distribution défini pour les deux précédents.

(I.e., il s'agit d'un processus de décision **Markovien**).

1 Introduction à l'Optimisation Stochastique
- Motivations
- Outils et approches différentes

2 Programmation stochastique : modèles de recours

3 Formulation déterministe équivalente

4 Approximation des distributions continues

5 Exemples illustratives
- Exemple 1 : installation de capacité
- Exemple 2 : localisation des dépôts

Motivation et exemple : marchand de journaux "newsvendor")

Exemple très classique.

E.g., `http://en.wikipedia.org/wiki/Newsvendor`

On peut définir le problème ainsi :

$$\min_{x}\{Cx + \mathcal{Q}(x)\}$$

où C est le coût unitaire du marchand pour acheter un journal, et où $\mathcal{Q}(x)$ réprésent le "coût" $(=$ profit $* -1)$ de ce qu'il peut faire après avoir vu la demande.

La variable x représent alors le nombre de journaux achetés par le marchand.

Soit P le prix unitaire pour lequel le marchand peut vendre un journal $(P > C)$. Le profit qu'il peut avoir dépend de ce prix, mais il dépend aussi de la demande des journaux.

Marchand de journaux (II)

Supposons par exemple que la demande D est une variable aléatoire qui pourrait prendre n'importe quelle valeur entière entre D_L et D_U avec une probabilité uniforme. Autrement dit,

$$p^j := Prob(D = j) = \frac{1}{D_U - D_L + 1}, \forall j \in [D_L, D_U].$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(x) &= -P \sum_{j=D_L}^{D_U} \frac{1}{D_U - D_L + 1} \min\{j, x\} \\
&= -\frac{P}{D_U - D_L + 1} \left(\sum_{j=D_L}^{x} j + \sum_{j=x+1}^{D_U} x \right) \\
&= -\frac{P}{D_U - D_L + 1} \left(\frac{(x + D_L)(x - D_L + 1)}{2} + x(D_U - x) \right) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Marchand de journaux (III)

A noter :

- La "version déterministe" de ce probème (c'est à dire, le problème où le marchand connait exactement la demande D avant d'acheter des journaux) est triviale. Il faut acheter exactement D journaux et les vendre tous.
- Dans la version stochastique, le marchand doit acheter des journaux avant qu'il connaisse la demande. Cette décision d'achat est un exemple de ce qu'on va appeler une décision de première étape.
- Ici, le recours qu'a le marchand par rapport à la demande, c'est le nombre de journaux à vendre.
- Ici, la décision de recours de trivial : Il faut vendre tout ce qu'on peut.

Formulation générale

On veut résoudre des problèmes de ce genre qui sont plus grands et dont le recours est plus compliqué. Alors on commence par définir la formulation générale :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.à} & Ax = b, x \in X. \end{array}$$

On appelera ce problème **SP**.
Ici, les variables x repésentent les décisions qui doivent être prises **avant** que l'incertitude est résolue.
On suppose alors que la matrice A soit déterministe et connue.

La fonction $\mathcal{Q}(x)$ représent les décisions qui peuvent être prises *après* l'incertitude est résolue.

Autrement dit, c'est *la fonction de recours*: l'évaluation des décisions qui peuvent être prises en réagissant à la situation qui se présent après que les variables aléatoires réalisent leurs valeurs.

Fonction de recours

Supposons qu'on peut décrire les éléments aléatoires avec un vecteur de variables aléatoires ξ.

On suppose que Ω indique l'ensemble des valeurs possibles pour ξ. Les éléments d'Ω sont **les scénarios**, et Ω est **l'ensemble des scénarois**.

Si Ω est fini, on pose $J = |\Omega|$ et on peut définir $\Omega = \{\xi^1, ..., \xi^J\}$. Pour chaque $\xi^j \in \Omega$, on suppose aussi que ξ^j arrivera avec probabilité p^j.
On définit ainsi la *fonction de recours* :

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{j=1}^{J} p^j Q(x, \xi^j).$$

où

$$Q(x, \xi^j) = \begin{array}{ll} \min_y & q(\xi^j)^T y \\ \text{s.à.} & W(\xi^j) y = h(\xi^j) - T(\xi^j) x \\ & y \in Y. \end{array}$$

pour chaque $\xi^j \in \Omega$ et chaque x : $Ax = b, x \in X$.

Fonction de recours

On définit ainsi la *fonction de recours* :

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{j=1}^{J} p^j Q(x, \xi^j).$$

où

$$Q(x, \xi^j) = \begin{array}{ll} \min_y & q(\xi^j)^T y \\ \text{s.à.} & W(\xi^j) y = h(\xi^j) - T(\xi^j) x \\ & y \in Y. \end{array}$$

pour chaque $\xi^j \in \Omega$ et chaque x : $Ax = b, x \in X$.
On appelle le problème $Q(x, \xi^j)$ *le problème de recours*.

Fonction de recours

Si ξ peut prendre n'importe quelle valeur d'un ensemble continu, on nomme cet ensemble Ω_ξ.
Ω_ξ est alors infini et continu, alors la distribution est aussi cotinue. Dans ce cas la distribution sera définie par la fonction de densité $p(\xi)$.

On définit ainsi la fonction de recours:

$$\mathcal{Q}(x) = \int_{\xi \in \Omega_\xi} Q(x,\xi) dp(\xi)$$

où

$$Q(x,\xi') = \begin{array}{ll} \min_y & q(\xi')^T y \\ \text{s.à.} & W(\xi')y = h(\xi') - T(\xi')x \\ & y \in Y. \end{array}$$

pour chaque $\xi' \in \Omega_\xi$ et chaque $x : Ax = b, x \in X$.

Le problème de recours $Q(x, \xi^j)$ a exactement la même interpretation que dans le cas où la distribution est discrète. La seule différence, c'est qu'il y une infinitude de valeurs possible de ξ.

Recours: définitions et différences...important!

- $\mathcal{Q}(x)$ est la **fonction** de recours : Il s'agit de *l'espèrance* de *tout* ce qui peut arriver après la première étape, supposé que
  - la distribution de la vecteur aléatorie ξ est connue;
  - les décisions qui seront prises après qu'on a vu la réalisation de ξ seront *optimale pour cette valeur spécifique de* ξ.

  La **fonction** de recours n'est pas un problème; c'est une **fonction**. La valeur de cette fonctions dépend tout simplement de l'argument x.
- $Q(x, \xi)$ est **le problème de recours**. C'est un *problème d'optimisation*. Pour le définir, il faut préciser **avant** la résolution du problème
  - la solution de premier étape x
  - les valeurs spécifiques prises par la variable aléatoire ξ.

La structure du probème de recours

Les propriétés du problème de recours sont déterminées par cinq éléments:

- Y: les bornes et les spécifications entières (s'il y en a) sur les variables de recours
- $q(\xi)$: les coefficients de la fonctionne objective de recours
- $h(\xi)$: la partie de la côté droite du problême de recours **qui ne dépendent pas** sur les variables de première étape
- $T(\xi)$: les **coefficients** des variables de première étape dans les **contraintes** du problème du recours
- $W(\xi)$: les **coefficients** des variables de recours dans les **contraintes**

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

Une formulation grande et unique

On peut rassembler toutes les définitions faites ci-dessus dans une grande formulation:

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T x + \sum_j p^j (q(\xi^j)^T y^j) \\
\text{s.à.} & Ax = b \\
 & T(\xi^j)x + W(\xi^j)y^j = h(\xi^j), \forall j \\
 & x \in X;\ y^j \in Y, \forall j
\end{array}
$$

Rémarquons les suivants:

- il y a une système de contraintes qui ne contient **que** les variables de première étape;
- pour chaque scénario il y a une système de contraintes qui relie les variables de deuxième étape correspondantes à cette scénario
  - les unes avec les autres, et/ou
  - avec les variables de premìere étape.

Structure de la matrice

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & c^T x & +p^1(q(\xi^1)^T y^1) & +p^2(q(\xi^2)^T y^2) & +\ldots & +p^J(q(\xi^J)^T y^J) & \\
\text{s.à.} & Ax & & & & & = b \\
& T(\xi^1)x & +W(\xi^1)y^1 & & & & = h(\xi^1) \\
& T(\xi^2)x & & +W(\xi^2)y^2 & & & = h(\xi^2) \\
& \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
& T(\xi^J)x & & & & +W(\xi^J)y^J & = h(\xi^J) \\
& x \in X; & y^1 \in Y, & y^2 \in Y, & \ldots, & y^J \in Y &
\end{array}
$$

Rémarqons

- la structure de la matrice (dite "bloque-diagonale");
- que si on fixe les variables x, on obtient J sous-problèmes distinctes et séparés.

Programmation mathématique

- La formulation déterministe équivalente est la méthode la plus directe pour utiliser les outils de la programmation mathématique sur les programmes stochastique.
    - Notez que cette formulation sera impossible décrire explicitement avec une distribution continue.
- Cela n'est pas la seule méthode pour appliquer les outils de la programmation mathématique.
  Souvent, cela n'est pas la plus efficace non plus.

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

Approximation de la fonction de recours

Si la distribution est continue et

$$\mathcal{Q}(x) = \int_{\xi \in \Omega_\xi} Q(x, \xi) dp(\xi)$$

le problème **SP**

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a.} & Ax = b, x \in X. \end{array}$$

devient effectivement trop difficile à résoudre. Dans ce cas, on considère une approximation de Ω qui est fini et dont la distribution est discrète. On pourrait définir cette distribution approchée des plusieurs manières, dont

- énchantillonage
- valeurs extrémales
- combinaisons des deux précédents

Approximation de la fonction de recours

En effet, on remplace Ω_ξ avec un ensemble fini Ω, $\Omega \subseteq \Omega_\xi$. On suppose que Ω contient J éléments et que chaque $\xi^j \in \Omega$ peut arriver avec probabilité p^j.
L'approximation de la fonction de recours devient alors

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{j=1}^{J} p^j Q(x, \xi^j),$$

c'est à dire exactement la même expression qu'on utilise dans le cas où la distribution d'origine est discrète.

Même dans le cas oû on commence avec un ensemble Ω' qui est fini mais trop grande, on peut toujours considerer un sous-ensemble $\Omega \subset \Omega'$ pour obtenir une relaxation qu'on peut esperer à résoudre.

1 Introduction à l'Optimisation Stochastique
- Motivations
- Outils et approches différentes

2 Programmation stochastique : modèles de recours

3 Formulation déterministe équivalente

4 Approximation des distributions continues

5 Exemples illustratives
- Exemple 1 : installation de capacité
- Exemple 2 : localisation des dépôts

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

Installation de capacité

On a un horizon de T périodes.

Il faut répondre à la demande pendant chaque période.

Il faut choisir un niveau de capacité qui nous permet de le faire.

Il y a des coûts unitaires suivants:

- stock $(h_t, t = 1, ..., T)$
- niveau de capacité (a)
- d'urgence $(g_t, t = 1, ..., T)$

Installation de capacité

Problème déterministe

$$
\begin{aligned}
\min \quad & ax + \sum_t g_t u_t + \sum_t h_t s_t \\
\text{s.à} \quad & z_t + s_{t-1} - s_t + u_t = d_t, \forall t \\
& z_t \leq x, \forall t \\
& z_t, s_t, u_t \geq 0, \forall t; x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

On suppose que $s_0 = 0$.

Installation de capacité

Un petit exemple numérique

$$T = 3$$

$$d = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$h_t = 1, \forall t$$
$$a = 5$$
$$g_t = 10, \forall t$$

On peut vérifier facilement que $x^* = 7$ est la valeur optimale de la capacité.

Installation de capacité : version plus réaliste (stochastique):

Données aléatoires : demande

- On suppose que $Pr(d_1 = 4) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_1 = 8) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_2 = 2) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_2 = 6) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_3 = 6) = \frac{1}{2}$, $Pr(d_3 = 12) = \frac{1}{2}$.
- On suppose aussi que les demandes des différentes périodes sont indépendantes l'un de l'autre.
- Ça nous donne pour résultat 8 scenarios, chacun avec probabilité $\frac{1}{8}$.

Première étape : niveau de capacité

Deuxième étape : production/stock/urgence

Installation de capacité : fonction de recours (stochastique)

Soit un vecteur d^j de demande et un niveau de capacité x^* choisi dans la première étape.

$$Q(x^*, d^j) = \begin{array}{ll} \min & \sum_t g_t u_t + \sum_t h_t s_t \\ \text{s.à} & z_t + s_{t-1} - s_t + u_t = d_t^j, \forall t \\ & z_t \leq x^*, \forall t \\ & z_t, s_t, u_t \geq 0, \forall t \end{array}$$

La fonction de recours devient

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, d^j)$$

Installation de capacité : fonction de recours (stochastique)

Avec cette notation, le problème stochastique devient

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & ax + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.à} & x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Il vaut la peine de comparer bien la notation de cet exemple avec la formulation générale, repetée ici :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a.} & Ax = b, x \in X. \end{array}$$

Installation de capacité (stochastique)

Remarquez bien que, si on remplacera d^j par son *espérance*, on aura *la version déterministe* du problème qu'on a considéré au début.

Est-ce qu'on aura la même choix optimale de capacité pour le problème stochastique que pour son approximation déterministe?

On pourrait poser aussi la question suivante : Est-ce qu'on éviterait à tout prix à utiliser des commandes à urgence, comme dans la version déterministe?

Comparaisons des modèles stochastique et déterministe

Pour cette application, la valeur optimale de x pour l'approximation déterministe d'origine est 7 (et la valeur optimale de l'approximation est 37).
La valeur de $\mathcal{Q}(7)$ est 12.5, et donc

$$a7 + \mathcal{Q}(7) = 35 + 13.5 = 48.5$$

Par contre, la valeur optimale de **SP** est 8, et $\mathcal{Q}(8) = 4.5$. Donc la valeur optimale de **SP** est

$$a8 + \mathcal{Q}(8) = 40 + 4.5 = 44.5.$$

Ce qu'on espérer gagner en utilisant le modèle stochastique est alors $48.5 - 44.5 = 4$.

On va y revenir.

Formulation déterministe équivalente

La **formulation déterministe équivalente** est celui qui est défini dans le fichier cap-stoch-8.mos et ensuite résolue par Xpress.

D'ailleurs, la commande "exportprob(...)" dans ce fichier écrit cette formulation, en format détaillé, dans le fichier cap-stoch-36.lp.

Installation de capacité : une version stochastique plus détaillée

Considerez ce qui arrivera si on supposait que la demande arrivait toujours en quantités pairs, et qu'on travaillait avec tous les scenarios possibles.

Il y aura 36 scenarios totales.

1. Introduction à l'Optimisation Stochastique
   - Motivations
   - Outils et approches différentes
2. Programmation stochastique : modèles de recours
3. Formulation déterministe équivalente
4. Approximation des distributions continues
5. Exemples illustratives
   - Exemple 1 : installation de capacité
   - Exemple 2 : localisation des dépôts

Localisation des dépôts : version déterministe

Rappel:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i f_i x_i + \sum_{i,k} c_{ik} z_{ik} + \sum_k t_k u_k \\ \text{soumis à} \quad & \sum_i z_{ik} + u_k \geq d_k, \forall k \\ & \sum_k z_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \\ & z_{ik}, \forall i, k; u_k \geq 0, \forall i, k; x_i \in \{0, 1\}, \forall i \end{aligned}$$

Localisation des dépôts : demande stochastique

Dans nôtre exemple, supposons que l'incertitude se montre dans la quantité de demande.
Les décisions initiales sont les décisions de construction:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i f_i x_i + \mathcal{Q}(x) \\
& x_i \in \{0,1\}, \forall i
\end{aligned}
$$

Si on peut définir un ensemble de J scénarios de demandes intéressants, on peut définir $\Omega = \{d^1, ..., d^J\}$, on peut approximer la fonction de recours

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, \mathbf{d^j})$$

où

$$
Q(x, d^j) = \begin{array}{ll}
\min & \sum_{i,k} c_{ik} z_{ik} + \sum_k t_k u_k \\
\text{s.à.} & \sum_i z_{ik} + u_k \geq \mathbf{d^j_k}, \forall k \\
& \sum_k z_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \\
& z_{ik}, \forall i, k; u_k \geq 0, \forall k
\end{array}
$$

Localisation des dépôts: composants du problème de recours

- L'ensemble Y dans la formulation générale correspond aux bornes $z_{ik}^j, u_k^j \geq 0, \forall i, k$ dans cette application.
- Le vecteur $\mathbf{q}(\xi^{\mathbf{j}})$ dans la formulation générale correspond aux coefficients $c_{ik}, \forall i, k$, et $t_k, \forall k$, dans cette application. Remarquons bien que ces coefficients *sont les mêmes pour toutes les scénarios*.
- La matrice $\mathbf{T}(\xi^{\mathbf{j}})$ dans la formulation générale correspond aux capacités $cap_i, \forall i$ dans cette application. Remarquons bien que ces coefficients *sont les mêmes pour toutes les scénarios*.

Localisation des dépôts: composants du problème de recours

- La matrice $\mathbf{W}(\xi^{\mathbf{j}})$ dans la formulation générale correspond aux coefficents des variables z et u dans les contraintes

$$\sum_i z_{ik} + u_k \geq \mathbf{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}}, \forall k$$

$$\sum_k z_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i$$

  Remarquons bien que ces coefficients *sont les mêmes pour toutes les scénarios*.

- Pour chaque scénario j, le vecteur $\mathbf{h}(\xi^{\mathbf{j}})$ correspond aux demandes $\mathbf{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}}, \forall k$. Remarquons bien que *les demandes peuvent changer de l'un scénario à l'autre*; ça veut dire que (dans cette application) c'est *les demandes* qui déterminent *la stochasticité* du problème.

Formulation déterministe équivalente

Voici le formulation déterministe équivalente pour exemple 2 :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i f_i x_i + \sum_{j=1}^{J} p^j \Big(\sum_{i,k} c_{ik} z_{ik}^j + \sum_k t_k u_k^j \Big) \\
\text{soumis à} \quad & \sum_i z_{ik}^j + u_k^j \geq \mathbf{d_k^j}, \forall k, \forall j \\
& \sum_k z_{ik}^j \leq Cap_i x_i, \forall i, \forall j \\
& x_i \in \{0, 1\}, \forall i \\
& z_{ik}^j \geq 0, \forall i, k, \forall j; \; u_k^j \geq 0, \forall k, \forall j
\end{aligned}
$$

A souvenir

- Formulations des programmes stochastiques et des problèmes de recours
- Formulation déterministe équivalente
- Applications