Sujet 4: Programmation stochastique — propriétés de fonction de recours

MSE3313: Optimisation Stochastiqe

Andrew J. Miller

Dernière mise au jour: October 19, 2011

Dans ce sujet...

1. Propriétés de la fonction de recours
   - Rappel
   - Convexité dans les variables de première étape
   - Convexité dans les données aléatoires
2. Bornes inférieures sur l'optimum
   - Inégalité de Jensen
   - Approximation des scénarios indépendants
3. Bornes supérieures sur l'optimum
   - Inégalité d'Edmundson-Mandansky
   - Evaluation de la fonction de recours pour une solution réalisable

1. Propriétés de la fonction de recours
   - Rappel
   - Convexité dans les variables de première étape
   - Convexité dans les données aléatoires
2. Bornes inférieures sur l'optimum
   - Inégalité de Jensen
   - Approximation des scénarios indépendants
3. Bornes supérieures sur l'optimum
   - Inégalité d'Edmundson-Mandansky
   - Evaluation de la fonction de recours pour une solution réalisable

Rappel : problème de recours

Le problème de recours avec une distribution finie:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.à.} & Ax = b, x \in X \end{array}$$

où

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, \xi^j),$$

l'ensemble X est défini par les bornes et/ou par des spécifications que quelques-un des variables x soient entières, et

$$Q(x, \xi) = \begin{array}{ll} \min & q(\xi)^T y \\ \text{s.à.} & W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x, y \in Y \end{array}$$

Ici encore, l'ensemble Y est défini par les bornes simples sur une variables et/ou par des spécifications que quelques-un des variables y soient entières.

Rappel : formulation déterministe équivalent

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^T x + \sum_j p^j (q(\xi^j)^T y^j) && (1)\\
\text{s.à.} \quad & Ax = b && (2)\\
& T(\xi^j)x + W(\xi^j)y^j = h(\xi^j), \forall j && (3)\\
& x \in X; \ y^j \in Y, \forall j && (4)
\end{aligned}$$

On appelera cette formulation **FDE**.
N'oubliez pas la structure *bloque-diagonale* de la matrice des contraintes.

La structure du probème de recours

Les propriétés du problème de recours sont déterminées par cinq éléments:

- Y: les bornes et les spécifications entières (s'il y en a) sur les variables de recours
- $q(\xi)$: les coefficients de la fonction objective de recours
- $h(\xi)$: la partie de la côté droite du problême de recours **qui ne dépendent pas** sur les variables de première étape
- $T(\xi)$: les **coefficients** des variables de première étape dans les **contraintes** du problème du recours
- $W(\xi)$: les **coefficients** des variables de recours dans les **contraintes**

Application: Localisation de dépôts (I)

$$\min \quad \sum_i f_i x_i + \mathcal{Q}(x)$$
$$x_i \in \{0,1\}, \forall i$$

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_j p^j Q(x, d^j)$$

où

$$Q(x, \mathbf{d^j}) = \begin{array}{ll} \min & \sum_{i,k} c_{ik} z^j_{ik} + \sum_k t_k u^j_k \\ \text{s.à.} & \sum_i (z^j_{ik} + u^j_k) \geq \mathbf{d^j_k}, \forall k \\ & \sum_k z^j_{ik} \leq Cap_i x_i, \forall i \\ & z^j_{ik} \geq 0, \forall i, k;\ u^j_k \geq 0, \forall k \end{array}$$

1. Propriétés de la fonction de recours
   - Rappel
   - Convexité dans les variables de première étape
   - Convexité dans les données aléatoires
2. Bornes inférieures sur l'optimum
   - Inégalité de Jensen
   - Approximation des scénarios indépendants
3. Bornes supérieures sur l'optimum
   - Inégalité d'Edmundson-Mandansky
   - Evaluation de la fonction de recours pour une solution réalisable

Définition de convexité

Envelope convexe

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble.
$\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x^1, x^2 \in X \text{ et } \lambda : 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ tels que } x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\}$.

Fonction convexe

Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout $x \in \text{conv}(X)$.
$f(x)$ est convexe ssi, $\forall x^1, x^2 \in \text{conv}(X)$ et $\forall \lambda : 0 \leq \lambda \leq 1$,
$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$

Suppositions nécéssaires

Quelles suppositions sont-elles nécéssaires pour que la fonction de scenario $Q(x, \xi)$ soit convexe dans les variables x?

Supposition (1)

$Y = \{y : y \geq 0\}$

Ça veut dire que l'ensemble Y ne comprend pas des spécifications que des variables soient entières.

Dual de la deuxième étape

Pourquoi cette supposition nous intéresse?

$$
\begin{array}{rclll}
 & & & \textit{Primal} \\
Q(x,\xi) & = & \min_y & q(\xi)^T y \\
 & & \text{s.à.} & W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x \\
 & & & y \geq 0 \\
 & & & \textit{Dual} \\
 & = & \max_\pi & (h(\xi) - T(\xi)x)^T \pi \\
 & & \text{s.à.} & W(\xi)^T \pi \leq q(\xi) \\
 & & & \pi \text{ libre}
\end{array}
$$

Remarquons que, dans les programmes linéaires ci-dessus, tous les éléments qui paraissent en rouge, brun, ou **noir** sont des *paramètres*. Seulement les éléments en **bleu** sont des variables.
Maintenant, on peut appliquer la théorie de la programmation linéaire (et surtout la dualité) pour trouver des propriétés de la fonction de recours.

Convexité dans les variables de première étape

Théorem (1)

La fonction $Q(x, \xi)$ est convexe en x.

Preuve: Soit un $x^* \in X$ et un scénario ξ. De la Supposition 1 on sait que

$$q(x^*, \xi) = \begin{array}{ll} \max_{\pi} & (h(\xi) - T(\xi)x^*)^T \pi \\ \text{s.à.} & W(\xi)^T \pi \leq q(\xi) \\ & \pi \text{ libre.} \end{array} \tag{5}$$

Soit π^* la solution optimale (duale) de ce programme linéaire; alors $q(x^*, \xi) = (h(\xi) - T(\xi)x^*)^T \pi^*$.
Soit un autre point $\bar{x} \in X$. Pour des raisons analogues, on sait que

$$Q(\bar{x}, \xi) = \begin{array}{ll} \max_{\pi} & (h(\xi) - T(\xi)\bar{x})^T \pi \\ \text{s.à.} & W(\xi)^T \pi \leq q(\xi) \\ & \pi \text{ libre.} \end{array} \tag{6}$$

Preuve de la convexité dans les variables de première étape

Théorem (1)

La fonction $q(x, \xi)$ est convexe en x.

Preuve: (suite)
Maintenant on sait que

$$Q(\bar{x}, \xi) \geq (h(\xi) - T(\xi)\bar{x})^T \pi^*.$$

Pourquoi?
π^* est optimale pour (5), alors réalisable.
π^* *est alors réalisable pour (6).*
Si π^* est optimale aussi pour (6), alors $Q(\bar{x}, \xi) = (h(\xi) - T(\xi)\bar{x})^T \pi^*$.
Si π^* n'est pas optimale pour (6), soit $\bar{\pi}$ une solution optimale pour (6).
Alors

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}, \xi) &= (h(\xi) - T(\xi)\bar{x})^T \bar{\pi} \\ &> (h(\xi) - T(\xi)\bar{x})^T \pi^* \end{aligned}$$

par la définition de l'optimalité.
$\square$

Rémarques sur la preuve

Pourquoi est-ce que cela suffit pour démontrer le théorem?
Avant de continuer, rémarquons que

$$Q(\bar{x}, \xi) \geq (h(\xi) - T(\xi)\bar{x})^T \pi^*, \forall \bar{x} \in X$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$Q(\bar{x}, \xi) \geq {\pi^*}^T h(\xi) - ({\pi^*}^T T(\xi))\bar{x}, \forall \bar{x} \in X.$$

On a effectivement montré deux choses:

1. Pour chaque $x \in X$, **la plan de tangent** de la graphe de $q(x, \xi)$ au point $(x, q(x, \xi))$ **est inférieure ou égale** *à l'évaluation de la fonction pour toute sa domaine*.

   Ceci suffit pour montrer que la fonction est convexe en x.

2. La **la plan de tangent** mentionnée ci-dessus est définie par l'inégalité

   $$Q(x, \xi) \geq {\pi^*}^T h(\xi) - ({\pi^*}^T T(\xi))x,$$

   c'est à dire par h, T, *et la solution optimale de la dual* π^*.

   Bien que ce deuxième point n'est pas nécéssaire pour la preuve de convexité, **il sera essentiel pour des algorithmes de resolution de ce genre de problème**.

Méthode de preuve analogue

Pour identifier les conditions nécéssaires pour que la fonction de scenario $Q(x, \xi)$ soit convexe dans les données aléatoires, il faut considérer encore le **dual** du problème de recours.

Supposition (2)

$W(\xi) = W$ *et* $q(\xi) = q$, $\forall \xi$ *possible (recours fixe)*

En mots, les **coûts** des décisions de recours et **les effets** qu'ont les décisions de recours **ne dépendent pas** sur les scénarios.

Théorem (2)

La fonction $Q(x, \xi)$ *est convexe en* ξ.

1. Propriétés de la fonction de recours
   - Rappel
   - Convexité dans les variables de première étape
   - Convexité dans les données aléatoires

2. Bornes inférieures sur l'optimum
   - Inégalité de Jensen
   - Approximation des scénarios indépendants

3. Bornes supérieures sur l'optimum
   - Inégalité d'Edmundson-Mandansky
   - Evaluation de la fonction de recours pour une solution réalisable

Valeur optimal du problème déterministe

Résultat classique de Jensen:

Théorem

Etant donné une variable aléatoire ξ *et une fonction* $f(x, \xi)$ *qui est* **convexe en** ξ, *une borne sur l'espérance est donné par l'inégalité*

$$E_\xi[f(x, \xi)] \geq f(x, E_\xi[\xi])$$

Dans les modéles de programmation stochastique, on remplace la distribution par la moyenne, et ensuite on resoud le problème résultant.

Le valeur optimal de ce problème beaucoup plus simple (il n'y a pas de scénarios multiples) est une borne inférieure sur le valeur optimal du problème original.

Il faut que *tous les deux* Suppositions (1 et 2) soient satisfaites pour cette borne à être valide.

1. Propriétés de la fonction de recours
   - Rappel
   - Convexité dans les variables de première étape
   - Convexité dans les données aléatoires
2. Bornes inférieures sur l'optimum
   - Inégalité de Jensen
   - Approximation des scénarios indépendants
3. Bornes supérieures sur l'optimum
   - Inégalité d'Edmundson-Mandansky
   - Evaluation de la fonction de recours pour une solution réalisable

Une relaxation par decomposition

Rappelons la définition de $\mathbf{WS}^j$ pour chaque scenario ξ^j :

$$\mathbf{WS}^j = \begin{array}{rl} \min_{x,y} & c^T x^j + q(\xi^j)^T y^j \\ \text{s.à.} & Ax^j = b \\ & T(\xi^j)x^j + W(\xi^j)y^j = h(\xi^j) \\ & x^j \in X, y^j \in Y. \end{array}$$

Proposition (2)

La somme $\sum_j p^j \mathbf{WS}^j$ est une borne inférieure sur la valeur optimale de **SP**.

En effet, si OPT_{SH} est la valeur optimale de **SP**, on a démontré dans le dernier sujet que

$$EVPI = OPT_{SH} - \sum_j p^j \mathbf{WS}^j,$$

et on a aussi démontré que $EVPI > 0$.

A noter

La méthode utilisée pour définir cette borne correspond à la décomposition complète (même des variables de première étape) par scénarios.

Cette borne a l'avantage qu'elle est valide, *même* si ni Supposition 1 ni Supposition 2 ne soient satisfaites.

1. Propriétés de la fonction de recours
   - Rappel
   - Convexité dans les variables de première étape
   - Convexité dans les données aléatoires
2. Bornes inférieures sur l'optimum
   - Inégalité de Jensen
   - Approximation des scénarios indépendants
3. Bornes supérieures sur l'optimum
   - Inégalité d'Edmundson-Mandansky
   - Evaluation de la fonction de recours pour une solution réalisable

Approximation d'une fonction convexe d'**au-dessus**

Idée: sur-approximer la fonction de recours par une fonction linéaire/affine par morceaux.

On construit cette approximation par l'identification des scénarios qui representent *les valeurs extémes possibles* des distribution aléatoires.

Il faut que *tous les deux* Suppositions (1 et 2) soient satisfaites pour cette borne à être valide.

1. Propriétés de la fonction de recours
   - Rappel
   - Convexité dans les variables de première étape
   - Convexité dans les données aléatoires

2. Bornes inférieures sur l'optimum
   - Inégalité de Jensen
   - Approximation des scénarios indépendants

3. Bornes supérieures sur l'optimum
   - Inégalité d'Edmundson-Mandansky
   - Evaluation de la fonction de recours pour une solution réalisable

Evaluer $\mathcal{Q}(\bar{x})$ pour une solution de première étape $\bar{x}$

Soit $\bar{x}$ n'importe quelle solution pour la premère étape (i.e., $\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et $\bar{x} \in X$).
On peut définir $\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^J$ par la resolution des probèmes $Q(x, \xi^j)$, $j = 1, \dots, J$.
La solution $(\bar{x}, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^J)$ ainsi défini est réalisable pour **FDE**, et elle donne alors la borne supérieure de

$$c^T \bar{x} + \sum_j p^j (q(\xi^j)^T \bar{y}^j).$$

A remarquer: cette borne est valide même si les suppositions 1 et 2 ne sont pas satisfaites.

A souvenir

- Les suppositions réquises pour que la fonction de recours soit convexe
    - en x
    - en ξ
- Bornes sur l'optimum
    - inférieure:
        - formule de Jensen (seulement valide si $Q(x, \xi)$ est convexe en ξ)
        - approximation des scénarios indépendants
    - supérieure:
        - formule de Edmundson-Mandansky (seulement valide si $Q(x, \xi)$ est convexe en ξ)
        - valeur objectif d'une solution réalisable pour **FDE**
- Comment appliquer ces idées à nos applications