

TD4 : Méthode de Monte-Carlo - MCMC *a priori*

Exercice 1. On note

$$I = \mathbb{E}[h(\theta)] = \int_{\Theta} h(\theta)g(\theta)d\theta,$$

et \hat{I}_N l'estimateur de Monte-Carlo de I .

1. Montrer que \hat{I}_N est fortement consistant et sans biais.
2. Calculer la variance de l'estimateur $\text{Var}(\hat{I}_N)$ et son erreur quadratique moyenne $\text{MSE}(\hat{I}_N)$.
3. On considère le cas particulier où $g \sim \mathcal{N}_p(0_p, I_p)$ avec p la dimension et $h = I_p$. Calculer la variance de \hat{I}_N dans ce cas.

Exercice 2. On considère la chaîne de Markov définie sur l'espace $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ par la matrice de transition

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

et $\mu_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Montrer que A est bien une matrice de transition. Calculer μ_1 et μ_2 .

Exercice 3. On considère une marche aléatoire scalaire avec bruit gaussien centré de variance σ^2 et $\mu_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Ecrire le noyau de transition $K(x'|x)$.
2. Calculer μ_1 .
3. Calculer par récurrence μ_i .

Exercice 4. On considère la chaîne de Markov définie sur l'espace $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ par la matrice de transition

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Calculer la mesure invariante de cette chaîne de Markov.

Exercice 5. Soit

$$T = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[Y] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_Y \end{pmatrix} \right).$$

1. Montrer que Y et $Z = X - \Sigma_{12}\Sigma_Y^{-1}Y$ sont indépendantes.
2. En déduire que

$$X|Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[X] + \Sigma_{12}\Sigma_Y^{-1}(Y - \mathbb{E}[Y]), \Sigma_X - \Sigma_{12}\Sigma_Y^{-1}\Sigma_{21}).$$

Exercice 6. On considère la densité

$$f(x, y) = C \exp \left(-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2(1 + y + y^2)}{2} \right).$$

Donner la loi de X sachant Y et la loi de Y sachant X . En déduire un échantillonneur de Gibbs pour la loi cible f .