Université de Bordeaux
M1 MAS
UE : Simulation stochastique et méthodes bayésiennes pour le traitement du signal
Année 2016-2017

TP4 - Algorithmes de Metropolis-Hastings et de Gibbs

Les TP de cette UE sont inspirés de ceux proposés par François Caron, Jean-François Giovannelli, et Adrien Todeschini qui ont assuré cet enseignement pendant plusieurs années. Le but de ce TP est d'illustrer la méthode de simulation de variables aléatoires selon une loi cible donnée en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings et d'appliquer l'algorithme de Gibbs dans un cas simple.

Q. 1 *Soit un espace $E = \{1, 2, 3\}$ d'états de dimension 3, et Q le noyau de Markov suivant défini sur $E \times E$ par*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ \tilde{a}_1 & b_1 & a_3 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & b_2 \end{pmatrix},$$

où a_1, a_2, a_3, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ et b_1, b_2 sont des réels strictement positifs que vous pouvez choisir librement.

- *Proposer un choix de valeurs pour a_1, a_2, a_3, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ et b_1, b_2 dans le code ci-dessous pour construire un exemple d'une telle matrice Q :*

```
# Espace des états
E = c(1,2,3)

# Choix des valeurs de a1,a2,a3 et b1,b2
a1 = ### .... ###
a2 = ### .... ###
a3 = ### .... ###

tildea1 = ### .... ###
tildea2 = ### .... ###
tildea3 = ### .... ###

b1 = ### .... ###
b2 = ### .... ###

Q= rbind(c(0, a1, a2), c(tildea1, b1, a3),  c(tildea2, tildea3, b2))
```

- *Soit $x_0 \in E$ l'état initial de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de noyau de transition Q. Pour $n = 50000$, simuler une réalisation de $(X_n)_{n\geq 0}$ (avec $X_0 = x_0$).*
- *A partir de cette réalisation, calculer, pour tout $x \in E$,*

$$\hat{\mu}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}}.$$

On pourra utiliser la fonction `table`*.*

- *Le résultat vous semble-t-il dépendre de l'état initial* x_0 *?*
- *Vérifier que* $\hat{\mu}_n$ *est bien une approximation numérique de la loi invariante de* $(X_n)_{n\geq 0}$.

Q. 2 *Soit la loi de probabilité* $\mu = (1/6, 1/2, 1/3)$ *sur un espace* E *de dimension 3.*

- *Utiliser l'algorithme de Metropolis-Hastings pour simuler une chaîne de Markov de loi invariante* μ.
- *A partir de ces simulations, proposer une estimation de la mesure* μ *et la comparer à sa vraie valeur. On pourra laisser de côté les premières valeurs de la chaîne de Markov (*$n_0 = 10000$ *par exemple) et voir l'influence sur le résultat.*

Q. 3 *On souhaite simuler des variables aléatoires de densité*

$$f(x) = \frac{1}{Z_f} e^{-x^2}(2 + \sin(5x) + \sin(2x)),\ x \in [-3, 3],$$

où Z_f *est une constante de normalisation telle que* $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

- *Utiliser l'algorithme de Metropolis-Hastings pour simuler* $n = 50000$ *réalisations d'une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *à espace d'états* $E = \mathbb{R}$ *dont la loi stationnaire est une mesure de probabilité sur* E *de densité* f.
- *Vérifier à l'aide d'un histogramme que* $(X_n)_{n\geq n_0}$ *(pour* n_0 *assez grand) est une suite de variables aléatoires dont on peut considérer qu'elles sont des réalisations de la densité* f.
- *Quelle est l'influence du choix de* n_0 *(burn-in period) ?*
- *Quelle est l'influence du choix de la loi de proposition ?*

Q. 4 *On considère une suite d'observations* $Y_1, \ldots, Y_n \sim_{iid} \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ *où* θ *est un paramètre inconnu, et la variance* σ^2 *est connue. On s'intéresse à l'estimation de* θ *par une méthode bayésienne pour différent choix de la loi a priori* $\pi(\theta)$.

Pour $\pi(\theta) \sim \mathcal{U}(a, b)$, *simuler à partir de l'algorithme de Metropolis-Hasting un échantillon de variables aléatoires selon la loi a posteriori* $\pi(\theta|Y_1, \ldots, Y_n)$. *Représenter l'échantillon obtenu à l'aide d'un histogramme, et en déduire un estimateur de* $\theta = 2$ *(avec* $\sigma^2 = 1$ *et* $n = 100$*). Etudier également l'influence du choix des hyperparamètres* a *et* b. *Que se passe-t-il si* $\theta \notin [a, b]$ *?*

Q. 5 *Utiliser l'algorithme de Gibbs pour simuler* $n = 1000$ *réalisations d'un vecteur gaussien* X *de dimension 2, de moyenne nulle et de matrice de covariance*

$$\mathbb{E}\left(XX^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

où $\rho \in]-1, 1[$ *est un paramètre dont vous pouvez choisir de faire varier la valeur pour juger de son influence sur les simulations en visualisant graphiquement l'évolution de l'algorithme.*