Université de Bordeaux
Master 1 MSS 15/10/2018

CONTRÔLE CONTINU
PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Durée 2h00

EXERCICE I.

On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On rappelle que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X > t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = \min(X, Y)$. Calculer la fonction de répartition de Z. En déduire que Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. Pourquoi ce résultat était attendu ?
3. On considère la variable aléatoire $T = X + Y - 2$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Calculer la fonction caractéristique de T.

EXERCICE II.

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \theta^2 e^{-\theta x} & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\theta > 0$ un paramètre.

1. Déterminer les densités marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X - Y$ et $T = Y$. En déduire la loi de Z.

EXERCICE III.

On considère des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes et de même loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

avec $\theta > 0$ un paramètre.

1. Calculer $\mathbb{E}[X_1^a]$ pour $a \in \mathbb{R}$.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

EXERCICE IV.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et

$$\mathbb{P}(Y = 1) = r, \quad \mathbb{P}(Y = -1) = 1 - r,$$

où $p \in]0,1[$ et $r \in]0,1[$ sont deux paramètres. On définit deux nouvelles variables Z et T par

$$Z = XY, \quad T = X.$$

1. Donner la loi du couple (Z, T).
2. Calculer l'espérance et la matrice de covariance du couple (Z, T).
3. Montrer que Z est une variable aléatoire discrète telle que

$$\mathbb{P}(Z = -1) = p(1 - r), \quad \mathbb{P}(Z = 0) = (1 - p) \quad \mathbb{P}(Z = 1) = pr.$$

4. On suppose que l'on observe $z_1, ..., z_n$ les tirages de n variables aléatoires $Z_1, ..., Z_n$ i.i.d. de même loi que Z. Donner une estimation du maximum de vraisemblance de (p, r). En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance.