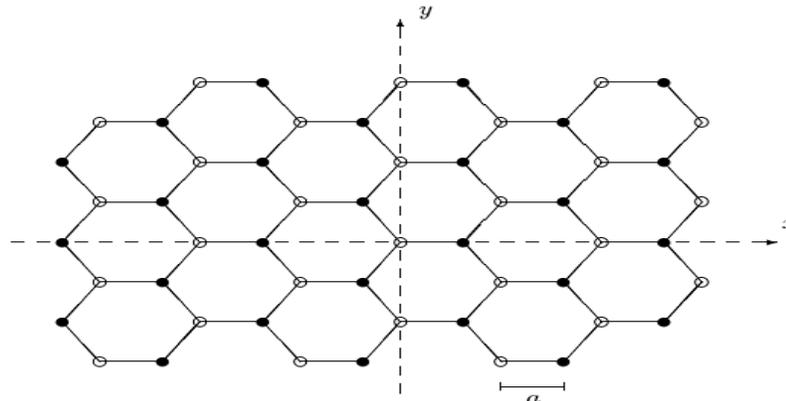


MARCHE ALÉATOIRE SUR LE GRAPHÈNE

Le graphène est un cristal bidimensionnel de carbone dont l'empilement constitue le graphite. Il a pu être extrait pour la première fois en 2004 par l'équipe du physicien néerlandais d'origine russe André Geim. André Geim a reçu avec le physicien russo-britannique Konstantin Novoselov le prix Nobel de physique en 2010 pour l'extraction du graphène. Des recherches récentes ont montré que le graphène va jouer un rôle fondamental dans le siècle à venir pour ses qualités exceptionnelles de conductivité et de stockage de l'énergie. Notre objectif est d'étudier et simuler la marche aléatoire sur le graphène qui peut être vu comme un réseau particulier de \mathbb{Z}^2 avec des noeuds blancs et noirs.



A l'instant 0, le marcheur est situé à l'origine sur un point blanc. A l'instant 1, le marcheur bouge nécessairement sur un point noir. Il va au point situé sur sa droite avec probabilité $p_{0,0}$, au point en haut à gauche avec probabilité $p_{0,1}$, ou au point en bas à gauche avec probabilité $p_{0,2}$, avec $p_{0,0} + p_{0,1} + p_{0,2} = 1$. A l'instant 2, le marcheur bouge nécessairement sur un point blanc. Il va au point situé sur sa gauche avec probabilité $p_{1,0}$, au point en bas à droite avec probabilité $p_{1,1}$, ou au point en haut à droite avec probabilité $p_{1,2}$, avec $p_{1,0} + p_{1,1} + p_{1,2} = 1$. Ensuite, la marche se poursuit suivant exactement le même processus. Soit S_n la position du marcheur à l'instant $n \geq 1$,

$$S_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

On a, pour tout $i = 0, 1$ et pour tout $k = 0, 1, 2$,

$$p_{i,k} = \mathbb{P} \left(S_{n+1} = \begin{pmatrix} x + a \cos(2k\frac{\pi}{3} + i\pi) \\ y + a \sin(2k\frac{\pi}{3} + i\pi) \end{pmatrix} \middle| S_n = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$

On a la convergence presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = m \quad \text{p.s.}$$

ainsi que la normalité asymptotique

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

où la moyenne m et la matrice de covariance Γ peuvent être calculées explicitement en fonction de a et des probabilités de transition $p_{i,k}$.

L'objectif de ce projet est de créer un code Scilab permettant de simuler la marche aléatoire sur le graphène et de visualiser la convergences presque sûre ainsi que la normalité asymptotique ci-dessus, où la maille a et les probabilités de transition $p_{i,k}$ seront affectées par l'utilisateur. On peut également se poser la question de ce qui se passe lorsque l'on a plusieurs couches qui se superposent et qu'en chaque point le marcheur peut passer d'une couche à l'autre avec une probabilité non nulle. Quel est l'impact sur les résultats de convergence ?