LA MARCHE DU REQUIN

La marche aléatoire du requin est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$. La description de cette marche aléatoire fait intervenir des lois symétriques α-stable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Commençons donc par expliquer ce qu'est une loi symétrique α-stable.

Définition 0.1. *Soient $\alpha \in]0,2]$ et $\sigma \geqslant 0$. X est de loi symétrique α-stable de paramètre d'échelle σ, et on note $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma)$, si sa fonction caractéristique vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'égalité $\mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}$.*

On remarque par exemple que les lois normales centrées et les lois de Cauchy sont des lois α-stables dont on précisera les coefficients. Dans toute la suite on parlera de loi α-stable $\mathcal{S}_\alpha$ lorsque l'on aura $\sigma = 1$. La question de la simulation de telles lois n'est pas évidente de prime abord.

Proposition 0.2. *Soient $W \sim \mathcal{E}(1)$, $\Theta \sim \mathcal{U}(]-\pi/2, \pi/2[)$ et $\alpha \in]0,2]$. On pose*

$$Y = \frac{\sin(\alpha\Theta)}{(\cos(\Theta))^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Theta)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Alors on a $Y \sim \mathcal{S}_\alpha$.

On décrit maintenant la marche aléatoire du requin. On fixe des paramètres $\alpha \in]0,2]$, $p \in [0,1]$ et on note S_n la position du requin au temps $n \in \mathbb{N}$. On considère également une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{S}_\alpha$. À l'instant 0, le requin est situé à l'origine, $S_0 = 0$. À l'instant 1, il se déplace de X_1 avec $X_1 = \xi_1 \sim \mathcal{S}_\alpha$ et l'on a $S_1 = X_1$. Ensuite, à chaque instant $n \geqslant 2$, on choisit uniformément au hasard un instant k parmi les instants précédents $\{1, \ldots, n-1\}$, puis on détermine

$$X_n = \begin{cases} X_k & \text{avec probabilité} \quad p, \\ \xi_n & \text{avec probabilité} \quad 1-p, \end{cases}$$

La position du requin au temps n est alors donnée par

$$S_n = S_{n-1} + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Par exemple, $S_2 = 2\xi_1$ avec probabilité p et $S_2 = \xi_1 + \xi_2$ avec probabilité $1-p$. Le comportement asymptotique de la marche du requin est lié aux valeurs de α et p. Dans le cas sous-critique $\alpha p < 1$, on a

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{S}_\alpha(\sigma_\alpha)$$

avec σ_α un paramètre dépendant de α. Dans le cas sur-critique $\alpha p > 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^p} = Z \qquad \text{p.s.}$$

avec Z une variable aléatoire réelle. On ne connaît pas le comportement de S_n lorsque $\alpha p = 1$.

Créer un code Scilab permettant de simuler la marche du requin et de visualiser les résultats de convergences décrits précédemment. Que se passe-t-il dans le cas critique. Pour vérifier l'adéquation à une loi $\mathcal{S}_\alpha(\sigma)$, on pourra utiliser la fonction caractéristique empirique qui vaut, pour un échantillon i.i.d. $Y_1, ..., Y_n$,

$$\Phi_n(t) = \frac{\sum_{j=1}^n e^{itY_j}}{n}$$

et qui est un estimateur de la fonction caractéristique des Y_j.