

Espaces de Probabilités Probabilités Conditionnelles, Indépendance

Exercice 1. On lance une infinité de fois une pièce. On obtient donc une suite infinie formée de piles et de faces, qui appartient à $\{\text{Pile, Face}\}^{\mathbb{N}}$. On note A_n l'événement "Pile apparaît au n-ième coup". Décrire les événements suivants avec des opérations ensemblistes :

1. On obtient face au deuxième coup.
2. On obtient au moins un pile.
3. On obtient jamais pile.
4. On obtient exactement un pile.
5. On obtient que des faces après le 100-ième coup.
6. On obtient pile un nombre fini de fois.
7. On obtient pile un nombre infini de fois.

Exercice 2. On tire simultanément 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité :

1. p_2 de tirer exactement deux as ?
2. p_3 de tirer au moins un as ?
3. p_4 de tirer une double paire ?
4. p_5 de tirer un full (3 cartes d'une valeur et deux d'une seconde valeur) ?

Exercice 3. Les villages A et B sont reliés par deux routes, ainsi que les villages B et C. Chacune des 4 routes a une probabilité p d'être bloquée par la neige, indépendamment les unes des autres. Quelle est la probabilité qu'on puisse aller de A à C par la route (en passant par B) ?

Exercice 4. On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc. Soit A l'évènement « le chiffre du dé noir est pair », B l'évènement « le chiffre du dé blanc est impair » et C l'évènement « les deux chiffres ont même parité ». Montrer que ces trois évènements sont indépendants deux à deux mais ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 5. Un lot de montres identiques est reçu par un détaillant parisien. Celui-ci provient de façon équiprobable soit de Hong-Kong, soit de Singapour. L'usine de Hong-Kong produit un article défectueux sur 1000 en moyenne, celle de Singapour un sur 200. On suppose que dans chaque usine les montres sont produites de façon indépendantes. Le détaillant inspecte une première montre : elle marche. Sachant ceci, quelle est la probabilité que la deuxième montre inspectée marche elle aussi ?

Exercice 6. Une urne U contient a boules blanches et b boules rouges tandis qu'une urne V contient b boules blanches et a boules rouges. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule dans U ou dans V selon les règles suivantes :

- le premier tirage s'effectue dans l'urne U ,
- si on obtient une boule blanche lors d'un tirage (quelque soit l'urne), le tirage suivant s'effectue dans U , et si on obtient une boule rouge, le tirage suivant s'effectue dans V ,
- après chaque tirage la boule est remise dans l'urne dont elle provient.

Pour $n \geq 1$, soit p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n ème tirage.

1. Montrer, pour tout $n \geq 1$, la relation $p_{n+1} = cp_n + d$ avec c et d à déterminer.
2. En déduire la valeur de p_n et sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 7. Un livre contient 4 erreurs. À chaque relecture une faute non corrigée est corrigée avec une probabilité $1/3$. On suppose que les erreurs et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Combien faut-il faire de relectures pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à $0,90$?
2. Traiter la même question en supposant que le nombre x d'erreurs est réparti uniformément sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.