Université de Bordeaux
Master 1 MSS 26/10/2017

CONTRÔLE CONTINU
PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Durée 2h00

PROBLÈME I. Soit $p \in]0,1[$. On effectue une suite de tirages successifs avec remise dans une urne contenant des jetons de 2 types : des jetons portant le numéro 1 en proportion p et des jetons portant le numéro 0 en proportion $1-p$. On appelle série une suite de numéros identiques. Soit X la longueur de la première série et Y la longueur de la deuxième série. Par exemple, pour le tirage 1111001100..., on a $X = 4$ et $Y = 2$.

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement :
$$A_i = \text{« le ième jeton tiré porte le numéro 1 »}.$$
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ exprimer l'évènement $\{X = k\}$ en fonction des évènements A_i. Donner la loi de X.
2. Calculer la loi de (X, Y). En déduire la loi de Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

PROBLÈME II. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité
$$f(x, y) = 2e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{0 \leqslant x \leqslant y}.$$

1. Déterminer les densités de X et Y.
2. Calculer la fonction de répartition de Y et $\mathbb{E}[Y]$. On rappelle que l'espérance d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ vaut $1/\lambda$.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

PROBLÈME III. On considère une variable aléatoire X de loi de Pareto $\mathcal{P}(a)$, de densité
$$h(x) = \frac{a}{x^{a+1}}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x),$$
o $a > 0$ est un paramètre.

1. On considère n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{P}(a)$. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de a pour l'échantillon $X_1, ..., X_n$.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = \ln X$.

PROBLÈME IV. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(1)$. Rappelons que la loi exponentielle de paramètre 1 est une loi continue de densité
$$f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{x>0}.$$
Soient U et V les variables aléatoires réelles définies par
$$U = \frac{X}{Y}, \quad V = Y.$$

1. Le vecteur (X, Y) est-il un vecteur aléatoire à densité ? Si oui donner sa densité $f_{(X,Y)}$.
2. Montrer que le couple (U, V) est un vecteur à densité et donner sa densité.
3. Donner les lois marginales de U et V.
4. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{E}[U]$.